

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SERGIPE

CAMPUS ARACAJU

DIRETORIA DE ENSINO

COORDENADORIA DE ENGENHARIA CIVIL

CURSO DE BACHARELADO EM ENGENHARIA CIVIL

ARON FORTES SOUZA GOMES

**ANÁLISE NÃO LINEAR FÍSICA E GEOMÉTRICA DE ESTRUTURAS DE
CONCRETO ARMADO**

MONOGRAFIA

.

ARACAJU

2020

ARON FORTES SOUZA GOMES

**ANÁLISE NÃO LINEAR FÍSICA E GEOMÉTRICA DE ESTRUTURAS DE
CONCRETO ARMADO**

Monografia apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel, da Coordenação do Curso de Engenharia Civil, do Instituto Federal de Sergipe – Campus Aracaju.

Orientador: Prof. Me. Rodolfo Santos da Conceição

ARACAJU

2020



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SERGIPE
Av. Jorge Amado, 1551 – Loteamento Garcia, Bairro Jardins - CEP 49025-330 – Aracaju/SE
Fone: (79) 3711 1400 – E-mail: reitoria@ifs.edu.br

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SERGIPE

CAMPUS ARACAJU

CURSO DE BACHARELADO EM ENGENHARIA CIVIL

TERMO DE APROVAÇÃO

Título da Monografia Nº 177

**ANÁLISE NÃO-LINEAR FÍSICA E GEOMÉTRICA DE ESTRUTURAS DE
CONCRETO ARMADO.**

ARON FORTES SOUZA GOMES

Esta monografia foi apresentada às 09h00 do dia 04 de dezembro de 2020 como requisito parcial para a obtenção do título de BACHAREL EM ENGENHARIA CIVIL. O candidato foi arguido pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.


Prof. M.Sc. Marcílio Fabiano Goivinho da
Silva
(IFS – Campus Aracaju)


Prof. Esp. Gilberto Messias dos Santos
Junior
(IFS – Campus Estância)


Prof. M.Sc. Rodolfo Santos da Conceição
(IFS – Campus Aracaju)
Orientador


Prof. Dr. Pablo Gleydson de Sousa
(IFS – Campus Aracaju)
Coordenador da COEC

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Geocelly Oliveira Gambardella / CRB-5 1815,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Gomes, Aron Fortes Souza

G633a Análise não linear física e geométrica de estruturas de concreto armado. / Aron Fortes Souza Gomes. - Aracaju, 2020.

49f. : il.

Orientador: Rodolfo Santos da Conceição.
Monografia (Graduação - Bacharelado em Engenharia Civil) - Instituto Federal de Sergipe, 2020.

1. Análise não linear geométrica. 2. Análise não linear física. 3. Análise numérica. 4. Concreto armado. 5. Método da rigidez direta. I. Conceição, Rodolfo Santos da. II. Título.

CDU 624(81)

Dedico este trabalho à minha família.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer à minha família por ter apoiado essa busca pelo aprimoramento pessoal e profissional ocorrido. Em especial a minha mãe e ao meu pai por ter dado apoio necessário para eu chegar nesse momento.

Ao Colégio Santanna, em especial à família Santanna por ter ajudado na busca pelo conhecimento e ingresso nos cursos feitos e hoje poder estar vivendo esse momento único.

A instituição IFS a qual foi responsável por ter modelado meu perfil profissional e aos meus orientadores que pude ser instruído durante os cursos técnico e a graduação.

Agradeço ao meu orientador Prof. Rodolfo por ter me orientado neste trabalho e durante todo o curso nos temas que aís me identifiquei.

Agradeço aos colegas de sala por ajudarem e os parabenizo por serem futuros colegas de profissão muito empenhados.

Agradeço a empresa AD Engenharia por ter me proporcionado experiência profissional ao final do curso.

RESUMO

GOMES, Aron Fortes Souza. **Análise Não Linear Física e Geométrica de Estruturas de Concreto Armado**. 47 folhas. Monografia (Bacharelado em Engenharia Civil) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Sergipe – Campus Aracaju. 2020.

Esse trabalho visa a análise não linear física e geométrica de elementos estruturais, assim como a comparação com métodos simplificados prescritos na norma NBR 6118:2014 e na literatura. As análises foram realizadas em um algoritmo elaborado na linguagem JAVA denominado *NAP*, no qual é possível verificar os efeitos da não linearidade física e geométrica. Para a não linearidade geométrica, foi implementada a matriz de rigidez geométrica somada a matriz de rigidez elástica para que ocorresse a contribuição da alteração da geometria do elemento durante a aplicação dos esforços para no final verificar os deslocamentos. Para a não linearidade física, foram implementados em elementos estruturais a mudança de estágio ao longo do carregamento para verificar o comportamento em relação ao deslocamento. Os exemplos aplicados foram um pilar, o qual se verificou o deslocamento no meio do elemento considerando a não linearidade geométrica; uma viga, na qual foi verificado o deslocamento no meio do vão aplicando a não linearidade física; e um pórtico plano, verificado os esforços e deslocamentos aplicando tanto a não linearidade física como a geométrica. Verificou-se que em todos os casos as respostas nas análises não lineares são maiores que as obtidas nas análises linear.

Palavras-chave: Análise Não Linear Geométrica. Análise Não Linear Física. Análise Numérica. Concreto Armado. Método da Rigidez Direta.

ABSTRACT

GOMES, Aron Fortes Souza. **Análise Não Linear Física e Geométrica de Estruturas de Concreto Armado**. 47 folhas. Monografia (Bacharelado em Engenharia Civil) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Sergipe – Campus Aracaju. 2020.

This work aims at the non-linear physical and geometric analysis of adaptive elements, as well as the comparison with simplified methods prescribed in NBR 6118: 2014 and in the literature. The analyzes were performed using an algorithm developed in the JAVA language called NAP, it is not possible to verify the effects of linearity and physical and geometric nonlinearity. For geometric non-linearity, a geometric stiffness matrix was added to the elastic stiffness matrix so that the contribution of changing the element's geometry would occur during the application of efforts to not check the final displacements. For the physical non-linearity, elements were implemented in addition to a change of stage along the loading to verify the behavior in relation to displacement. The records were a pillar, which verified the displacement in the middle of the element considering the geometric non-linearity; a beam, in which the displacement in the middle of the span was verified, applying physical non-linearity; and a flat portico, verified the efforts and displacements applying both physical and geometric nonlinearity. It was found that in all cases the responses in non-linear analyzes are greater than the characteristics in linear analyzes.

Keywords: Geometric Nonlinear Analysis. Physical Nonlinear Analysis. Numerical analysis. Reinforced Concrete. Direct Stiffness Method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Exemplo de transformação de uma estrutura real em modelo estrutural.	16
Figura 2 – Função de forma representativa dos esforços normais.	19
Figura 3 – Função de forma representativa do esforço cortante e fletor.	19
Figura 4 – Sentido da força virtual e do deslocamento.	20
Figura 5 – Sentido da força virtual e do deslocamento.	21
Figura 6 - Eixos locais e deslocabilidades de uma barra de pórtico plano isolada.	21
Figura 7 – Matriz de rigidez elástica local de barra de um pórtico plano.	21
Figura 8 – Diagrama momento curvatura da seção solicitada a flexão simples	22
Figura 9 – Diagrama de tensões e deformações no concreto.	26
Figura 10 – Diagrama momento curvatura da seção solicitada a flexão simples.	27
Figura 11 – Majoração de momentos na base de um pilar devido aos efeitos de segunda ordem.	28
Figura 12 – Pórtico para validação da análise linear.	33
Figura 13 – Coluna comprimida.	35
Figura 14 – Gráfico Carga x Deslocamento para a coluna analisada	36
Figura 15 – Viga bi apoiada com duas cargas pontuais.	36
Figura 16 – Seção da viga bi apoiada	37
Figura 17 – Deslocamentos no meio da viga para os casos de carregamento analisados	39
Figura 18 – Ilustração do pórtico extraído e planta baixa padrão.	41
Figura 19 – Distribuição e valores dos carregamentos atuantes.	42
Figura 20 – Distância dos elementos e discretização do modelo de pórtico.	42

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Reações de apoio	34
Tabela 2 – Esforços internos	34
Tabela 3 – Deslocamentos.....	34
Tabela 4 – Propriedades mecânicas do modelo da aplicação III	37
Tabela 5 – Valores dos momentos de fissuração, plastificação e último para a viga de 3 Ø10.0	37
Tabela 6 – Comparação entre os deslocamentos do algoritmo e Ribeiro (2016).	43
Tabela 7 – Comparação entre os esforços do algoritmo e Ribeiro (2016).	44

LISTAS DE SÍMBOLOS

A_s'	Área da secção da armadura longitudinal de compressão.
A_s	Área da secção da armadura longitudinal de tração.
A	Área da secção trabalhada.
α_e	Coeficiente de homogeneização da secção.
b_i	Coeficiente de polinômio de aproximação para deslocamento axial.
c_i	Coeficiente de polinômio de aproximação para deslocamento transversal.
k'_{ij}	Coeficiente de rigidez local.
ε_x	Deformação normal na direção axial.
$\overline{d}'_1$	Deslocamento virtual imposto.
d'_i	Deslocabilidade de barra no sistema local.
u	Deslocamentos axiais real.
$\bar{u}$	Deslocamentos axiais virtual.
$\bar{\Delta}$	Deslocamentos generalizado.
ε_{cc}	Deformação na fibra mais comprimida do concreto.
ε'_s	Deformação na armadura comprimida.
v	Deslocamentos transversais real.
$\bar{v}$	Deslocamentos transversais virtual.
U	Energia de deformação.
Ω	Energia potencial da carga externa axial.
N_{Rd}	Esforço resistente de cálculo de uma secção transversal.
α	Fator que correlaciona aproximadamente a resistência à tração na flexão com a resistência à tração direta.
P	Força generalizada a ser calculada no sistema real.
N_i	Funções de forma.
I_c	Inércia da seção bruta de concreto.
I	Inércia da secção trabalhada.
K_e	Matriz de rigidez elástica.
K_g	Matriz de rigidez geométrica.
K_t	Matriz de rigidez tangente.
E_s	Módulo de elasticidade do aço.
E_c	Módulo de deformação do concreto.
E	Modulo de elasticidade.

M_r	Momento de fissuração.
M_{Rd}	Momento resistente de cálculo de uma secção transversal.
f_{ck}	Resistência a compressão característica do concreto.
f_{tk}	Resistência característica do concreto à tração.
f	Vetor de cargas nodais.
u	Vetor dos deslocamentos nodais.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	CONTEXTO E MOTIVAÇÃO	13
1.2	OBJETIVOS	14
1.3	METODOLOGIA	14
2	ANÁLISE ESTRUTURAL	16
2.1	MÉTODO DA RIGIDEZ DIRETA	17
2.2	MATRIZ DE RIGIDEZ ELÁSTICA.....	18
3	ANÁLISE NÃO LINEAR.....	22
3.1	NÃO LINEARIDADE FÍSICA	22
3.2	NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA.....	28
3.2.1	Matriz de Rigidez Geométrica.....	29
4	ESTUDOS DE CASO – APLICAÇÕES DO PROGRAMA DESENVOLVIDO ..	33
4.1	APLICAÇÃO I – ANÁLISE LINEAR.....	33
4.2	APLICAÇÃO II – ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA	34
4.3	APLICAÇÃO III – ANÁLISE NÃO LINEAR FÍSICA.....	36
4.4	APLICAÇÃO IV – ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURA APORTICADA	40
5	CONCLUSÕES.....	45
5.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	45

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTO E MOTIVAÇÃO

O padrão de construção predial atualmente é configurado por elementos de esbeltez acentuada, que apresenta como vantagem ganhos de espaços no *layout* das edificações e redução de consumo de matéria prima, tanto para estruturas metálicas como concreto armado. Tal fato pode ser atribuído ao avanço nos estudos dos materiais que compõem essas construções e nas ferramentas de cálculo estrutural que cada vez mais estão próximas da representação real do comportamento dos elementos estruturais.

A desvantagem dos elementos esbeltos na estrutura se torna significativa quando esses apresentam efeitos de segunda ordem, como flambagem, que é uma deflexão acentuada, mais comum em pilares com rigidez à flexão reduzida.

As cargas verticais e horizontais provocam deslocamentos na estrutura, os quais devem ser previstos no modelo estrutural para obtenção dos esforços atuantes nos elementos necessários para uma análise e dimensionamento corretos. Quando essas cargas são aplicadas em peças esbeltas há o acréscimo de deslocamentos devido a estrutura somente alcançar equilíbrio em uma configuração deformada, essa deformação implica em esforços adicionais que podem provocar o colapso precoce dos elementos sem o uso eficiente das características dos materiais constituintes.

No Brasil, há histórico de acidentes ocasionados em edifícios esbeltos, como o ocorrido em Belém do Pará no ano de 2011. A ruína ocorreu durante uma forte chuva, onde foram registrados ventos intensos. O edifício tinha uma área construída de 13.400 m² e era composto por um pavimento subsolo, um nível térreo e 35 pavimentos elevados, resultando numa altura total de aproximadamente 105 metros. O peso total era estimado em 9 mil toneladas, as quais eram suportadas por 25 pilares. Conforme apontado por Tapajós *et al.* (2016), ocorreram falhas quanto à consideração da ação horizontal do vento.

Logo, é de fundamental importância o estudo de modelos que representem de forma satisfatória o comportamento das estruturas. Dentre os métodos numéricos de análise podem ser citados os Métodos da Rigidez Direta (MRD), dos Elementos finitos (MEF) e dos Elementos de contorno (MEC).

Para a aplicação desses métodos, é necessário uso de plataformas de cálculo que utilizem algum tipo de linguagem com ênfase em análise matricial, pois essa auxilia na implementação

do método escolhido. Optou-se por usar a linguagem JAVA através do *software* Eclipse por ser acessível ao público de forma gratuita.

1.2 OBJETIVOS

O presente trabalho tem como objetivo geral verificar o comportamento não linear físico e geométrico de elementos de pilares, de vigas e pórticos planos em relação aos deslocamentos e esforços gerados diante das cargas aplicadas utilizando uma ferramenta numérica.

Para o alcance do objetivo geral são necessários os seguintes objetivos específicos:

- Desenvolvimento de programa em linguagem JAVA, no qual será implementado o Método da Rigidez Direta (MRD), método base utilizado em *softwares* tradicionais de cálculo de estruturas, sobretudo para análises lineares;
- No mesmo programa, implementar as formulações para análise não linear geométrica através da matriz de rigidez geométrica;
- No mesmo programa, implementar as formulações da não linearidade física de acordo com as prescrições normativas da NBR 6118 – Projeto de estruturas de concreto – Procedimento (ABNT, 2014);
- No mesmo programa, implementar as formulações da não linearidade física de acordo com a teoria apresentada por Ghali & Favre (1986) *apud* Carvalho e Figueiredo (2017), a qual considera a fissuração gradual e generalizada dos elementos estruturais;
- Analisar os resultados obtidos, comparando-se as várias situações de cálculo simuladas.

1.3 METODOLOGIA

Primeiramente foi realizada uma revisão bibliográfica sobre as formulações analíticas e numéricas para análise estrutural tomando-se como base principalmente os trabalhos de Martha (2010) em relação aos fundamentos e Soriano (2005) em relação as formulações do algoritmo do programa.

Em seguida foi desenvolvido o programa para análise linear de pórticos planos em linguagem JAVA, validando as respostas geradas com os resultados obtidos no programa Ftool, amplamente utilizado e reconhecido para esse tipo de análise.

Posteriormente foram implementadas as formulações para análise não linear geométrica a qual foi validada através da comparação com solução analítica de um problema de flambagem, cuja formulação é facilmente trabalhada.

Por fim, foram implementadas as formulações para análise não linear física, sendo realizada a validação através de resultados experimentais apresentados na literatura.

2 ANÁLISE ESTRUTURAL

A análise estrutural consiste no estudo da composição dos elementos designados a resistir aos esforços oriundos de carregamentos externos neles atuantes, de modo a representar as propriedades físicas e geométricas da estrutura real, e também as condições externas (cargas permanentes e acidentais) atribuídas nesse estudo.

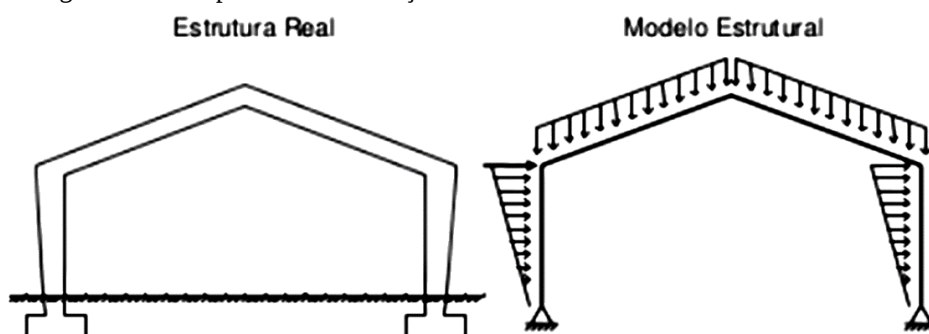
Através da análise estrutural, o projetista tem conhecimento dos esforços externos e internos, como também dos deslocamentos, deformações e tensões atuantes no modelo estrutural criado (MARTHA, 2010).

A análise estrutural pode ser realizada em regime linear e não linear, a primeira tratada no modelo elástico segundo a Lei de Hooke, na qual as tensões são proporcionais as deformações, e a segunda considerando-se as mudanças ocorridas na geometria dos elementos (não linearidade geométrica) e no comportamento dos materiais (não linearidade física) ao passo em que a estrutura está sendo carregada.

As não linearidades geométrica e física podem ser trabalhadas independentemente, uma vez que alguns materiais podem apresentar propriedade elástica quando solicitados em diferentes configurações deformadas.

A análise estrutural pode ser realizada de diversas maneiras, desde métodos simplificados, que consideram os efeitos locais dos elementos, até métodos mais sofisticados que consideram tanto a estrutura como os esforços de forma contínua. Um método bastante difundido na análise estrutural devido a sua implementação computacional ser muito prática é o método da rigidez direta (MRD). No MRD a estrutura é discretizada considerando-se a generalização dos diversos efeitos aplicados (Figura 1), contribuindo para a minimização das simplificações na concepção estrutural.

Figura 1 – Exemplo de transformação de uma estrutura real em modelo estrutural.



Fonte: (MARTHA, 2010)

2.1 MÉTODO DA RIGIDEZ DIRETA

Como definido por Martha (2010), o método da rigidez direta apresenta uma metodologia similar ao método dos deslocamentos. Ambos trabalham com as soluções fundamentais, que são as configurações deformadas elementares, ou seja, a atribuição a cada elemento a capacidade de deformação por meio de parâmetros fundamentais. A discretização desse método consiste em atribuir diversos elementos de barra de modo que represente uma configuração monolítica da estrutura real e sua metodologia de deformação elementar garante a continuidade dos deslocamentos das barras coincidentes.

As barras que constituem a discretização são compostas por dois nós nos quais são atribuídos deslocabilidades de acordo com a possibilidade de movimentação sob os esforços nele atuantes do modelo estrutural proposto. No MRD, essas deslocabilidades são chamadas de graus de liberdade pelo fato de se trabalhar em âmbito matricial, que engloba todos os graus de liberdade, inclusive a deslocabilidade dos apoios, nos quais serão restringidos por meio de técnicas matemáticas.

O MRD trabalha na resolução de um sistema de equações que globalmente é representada pela equação:

$$K_t u = f \quad (1)$$

Em que K_t é a matriz de rigidez tangente, f é o vetor de cargas nodais equivalentes, o qual representa a transferência de todas as cargas externas para os nós, e u é o vetor dos deslocamentos nodais referentes a atuação de todos os elementos em conjunto.

A matriz de rigidez tangente recebe contribuições que resultam em deslocamentos correspondentes ao tipo de análise realizada. A matriz de rigidez tangente, em uma análise linear-elástica, é constituída pela matriz de rigidez elástica que apresenta as características dos materiais atribuídos ao elemento estudado sem limites de ruptura.

Em uma análise não linear, são atribuídas variações na rigidez dos elementos constituintes devido a degradação dos materiais, podendo ainda ser implementada a matriz de rigidez geométrica, a qual representa a configuração deformada devido ao processo de carregamento. A equação 2 apresenta a implementação da não linearidade geométrica.

$$(K_e - K_g)u = f \quad (2)$$

onde K_e é matriz de rigidez elástica e K_g é a matriz de rigidez geométrica.

2.2 MATRIZ DE RIGIDEZ ELÁSTICA

O coeficiente de rigidez de barra no sistema local é uma força (ou momento) que deve atuar em uma extremidade de uma barra isolada, na direção da deslocabilidade d'_i , para equilibrá-la quando a deslocabilidade unitária $d'_j=1$ é imposta, isoladamente, em umas das extremidades (MARTHA, 2010).

Pode-se usar o princípio dos deslocamentos virtuais (PDV) para a obtenção dos coeficientes de rigidez locais em seus respectivos eixos da barra. O PDV é uma ferramenta para a determinação de forças (e momentos) necessárias para impor uma determinada configuração compatível com a estrutura. A equação 3 corresponde a generalização do PDV para deslocamentos axiais e transversais (MARTHA, 2010).

$$P = \frac{1}{\bar{\Delta}} \left[\int EA \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{d\bar{u}}{dx} dx + \int EI \cdot \frac{d^2v}{dx^2} \cdot \frac{d^2\bar{v}}{dx^2} dx \right] \quad (3)$$

Sendo P a força generalizada a ser calculada no sistema real; $\bar{\Delta}$ o deslocamento generalizado na direção e no ponto da força generalizada a ser calculada; E o módulo de elasticidade do material; A a área da secção trabalhada; $u(x)$ e $\bar{u}(x)$ são os deslocamentos axiais real e virtual, respectivamente; e $v(x)$ e $\bar{v}(x)$ são os deslocamentos transversais real e virtual, respectivamente.

Considerando-se uma variação linear para os deslocamentos axiais, pode-se obtê-los através da equação 4.

$$u(x) = b_1x + b_0 \quad (4)$$

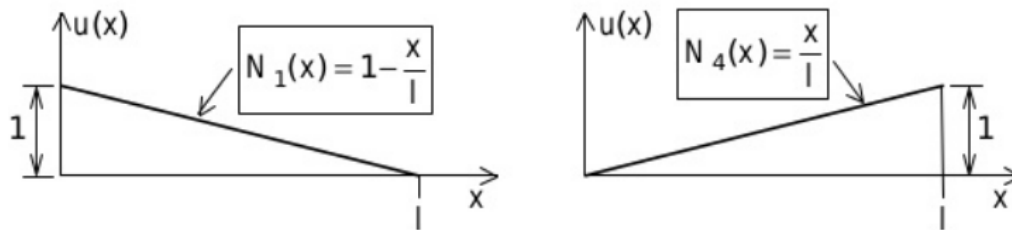
E os deslocamentos transversais, pela equação 5.

$$v(x) = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 \quad (5)$$

Em que os coeficientes b_i (Equação 4) e c_i (Equação 5) são determinados pelas condições de contorno do elemento, dando origem as funções de forma.

As funções de forma, representadas por $N_i(x)$, definem as elásticas elementares da barra isolada para o respectivo deslocamento unitário atribuído. A Figura 2 apresenta as funções que configuram os deslocamentos axiais $u(x)$ quando impostos deslocamentos unitários em suas extremidades.

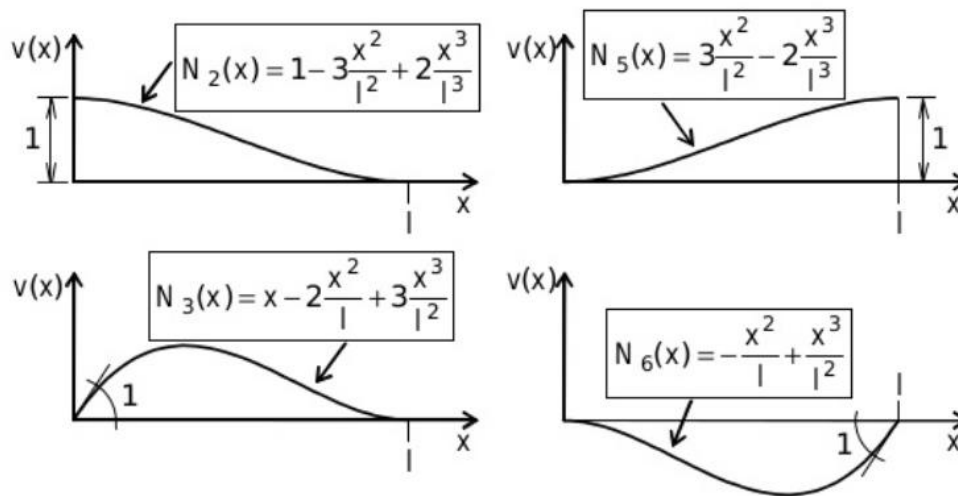
Figura 2 – Função de forma representativa dos esforços normais.



Fonte: (MARTHA, 2010)

A Figura 4 apresenta as funções de forma para as deslocabilidades transversais $v(x)$ de um elemento de pórtico plano, aplicando a Equação 5, que é uma função do 3º grau. Para a obtenção dos valores das constantes é necessário derivar a Equação 5, a qual corresponde a rotação do elementar, e aplicar as condições de contorno tanto de deslocamentos verticais quanto rotações. Desta maneira, para as funções $N_2(x)$, $N_3(x)$, $N_5(x)$ e $N_6(x)$ obtém-se as funções apresentadas na Figura 3.

Figura 3 – Função de forma representativa do esforço cortante e fletor.



Fonte: (MARTHA, 2010)

Como exemplo, considere a determinação do coeficiente de rigidez axial, conforme apresentado por Martha (2010). Aplicando a Equação 3 (representação generalizada do PDV), chega-se à Equação 7.

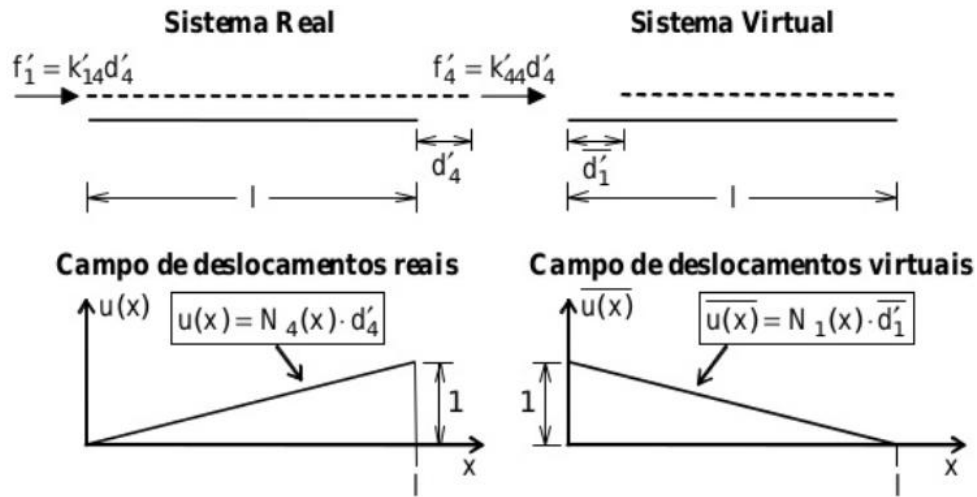
$$k'_{14}d'_4 = \frac{1}{d'_1} \left[\int_0^l EA \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{d\bar{u}}{dx} dx \right] = \left[\int_0^l EA \cdot \frac{dN_4}{dx} \cdot \frac{dN_1}{dx} dx \right] \cdot d'_4 \quad (7)$$

Ressalta-se que o deslocamento virtual $\bar{d}'_1$ imposto na extremidade inicial expresso na Figura 4 pode ser cancelado quando substitui as funções de deslocamento pelas funções de

forma. Através dessa comprovação, tem-se que a Equação 8 representa uma forma generalizada para obtenção dos coeficientes de rigidez axial.

$$k'_{ij} = EA \int_0^l \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx \quad (8)$$

Figura 4 – Sentido da força virtual e do deslocamento.



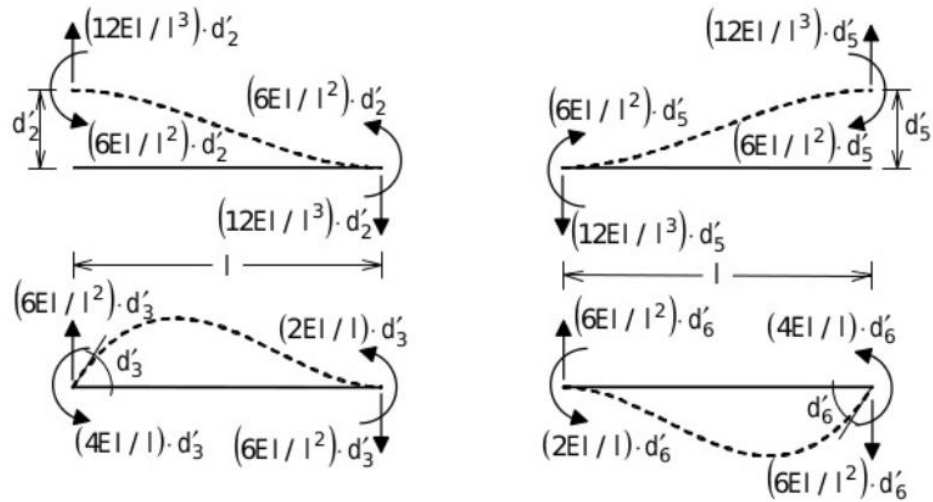
Fonte: (MARTHA, 2010)

Para a obtenção dos coeficientes de rigidez à flexão, mostrados na Figura 5, o processo é análogo ao demonstrado nos coeficientes axiais, porém deve-se utilizar a derivada segunda para as funções de forma dos deslocamentos transversais conforme equação 10 generalizada.

$$k'_{ij} = EI \int_0^l \frac{d^2 N_i}{dx^2} \cdot \frac{d^2 N_j}{dx^2} dx \quad (10)$$

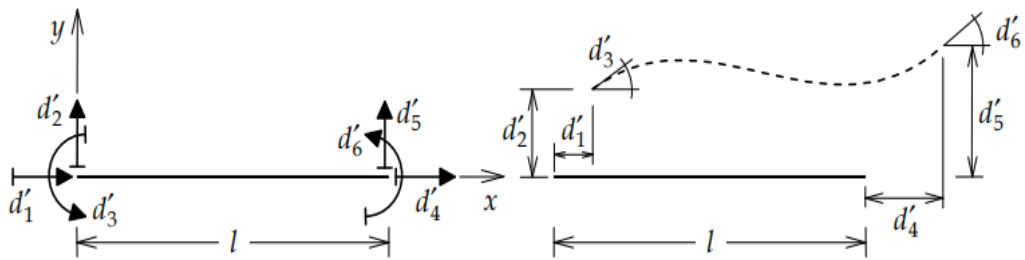
Após determinar os coeficientes de rigidez para cada um dos deslocamentos gerados pelos esforços aplicados, pode-se agrupá-los em uma matriz, denominada matriz de rigidez local, a qual considera o modelo estrutural escolhido e a ordem dos esforços e/ou graus de liberdade. Geralmente a ordem adotada é o esforço axial na primeira linha, seguido do esforço cortante e o momento fletor. A Figura 6 apresenta todas as deslocabilidades de elemento em barra bem como sua configuração deformada com a aplicação das deslocabilidades. A Figura 7 apresenta a matriz de rigidez local de um elemento de pórtico plano.

Figura 5 – Sentido da força virtual e do deslocamento.



Fonte: (MARTHA, 2010)

Figura 6 - Eixos locais e deslocabilidades de uma barra de pórtico plano isolada.



Fonte: (MARTHA, 2010)

Figura 7 – Matriz de rigidez elástica local de barra de um pórtico plano.

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Fonte: (O AUTOR, 2020)

3 ANÁLISE NÃO LINEAR

A análise não linear completa consiste na consideração tanto do comportamento não linear dos materiais como da variação na geometria dos elementos. A geometria dos elementos pode ser relevante na obtenção dos esforços finais quando esses possuem esbeltez que proporciona deslocamentos significativos implicando em esforços adicionais, os chamados efeitos de segunda ordem. Esses esforços adicionais podem provocar o colapso da estrutura quando os elementos atingem a resistência última do material apresentando características não lineares frente aos carregamentos.

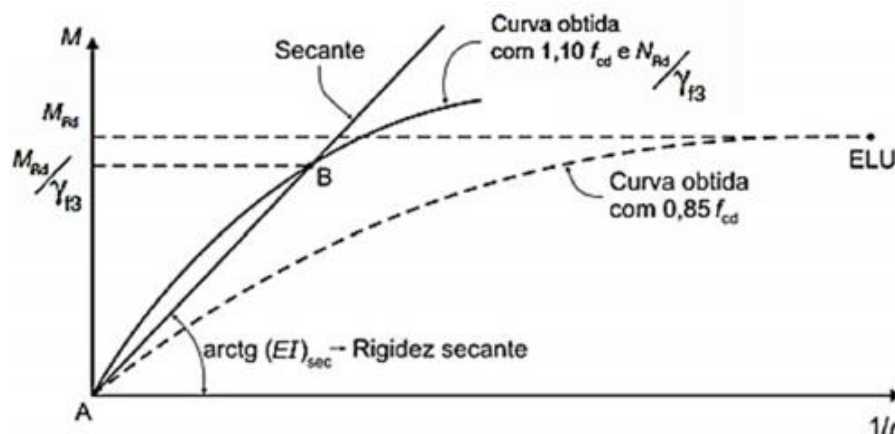
3.1 NÃO LINEARIDADE FÍSICA

Em estruturas de concreto armado, o comportamento do material é bastante complexo devido ao processo de fissuração. Essa fissuração nas seções, que ultrapassam as tensões de tração do concreto ocasionando a redução da rigidez, que por consequência provocam maiores deslocamentos quando comparados ao regime linear.

A rigidez de uma seção pode ser descrita através da relação momento-curvatura (Figura 8) a partir de uma área de aço atribuída ao elemento e uma força normal aplicada, determinando assim a rigidez da matriz elástica. Porém, como descrito em Franco (1985a) *apud* Oliveira (2007), a implementação da variação da rigidez ao longo do elemento torna o processo trabalhoso e de difícil aplicação na análise estrutural, resultando em vários estudos que buscam considerar a não linearidade física de forma simplificada.

Segundo NBR 6118:2014, a curva tracejada da Figura 8, constituída com valores de cálculo das resistências do concreto e do aço, é utilizada para definir o esforço resistente último (M_{Rd}) correspondente a N_{Rd} , ou seja, para obter a capacidade resistente da seção.

Figura 8 – Diagrama momento curvatura da seção solicitada a flexão simples



Fonte: (MENDES, 2017)

Para a análise não linear física de pórticos, a NBR 6118:2014 prescreve alguns valores simplificados para a implementação na matriz de rigidez elástica para obtenção dos deslocamentos relativos aos carregamentos impostos, considerando o efeito de fissuração e de plastificação do aço. A redução das rigidezes à flexão de acordo com a NBR 6118:2014 é apresentada no Quadro 1.

Quadro 1 – Valores estabelecidos por norma para a redução da rigidez.

Elementos	EI_{sec}
Lajes	$0,3 E_c I_c$
Vigas	$0,4 E_c I_c$ para $A_s' \neq A_s$
	$0,5 E_c I_c$ para $A_s' = A_s$
Pilares	$0,8 E_c I_c$
Em que: I_c é o momento de inércia da seção bruta de concreto, incluindo, quando for o caso, as mesas colaborantes; E_c é o valor representativo do módulo de deformação do concreto; A_s' e A_s são as áreas de aço da face superior e inferior respectivamente.	

Fonte: (ABNT, 2014)

A NBR 6118:2014 ainda permite estimar o valor do módulo de elasticidade inicial a partir do f_{ck} estimado. Com esse valor é possível multiplicá-lo por um fator para que se obtenha o módulo de deformação secante.

A norma também prescreve que essas reduções não devem ser atribuídas para análise elementares, ou seja, para dimensionamentos de peças estruturais, pois, esses valores são resultados de diversos estudos em pórticos. Logo, a implementação desses valores tem como finalidade a obtenção dos esforços nas extremidades dos elementos da análise e verificação dos deslocamentos globais de um pórtico.

Experimentos feitos por Pinto e Ramalho (2002) mostram que as reduções da rigidez descritas na norma representam valores conservadores. E estudos citados por Oliveira (2007) apresentam diversos valores de reduções com pontos positivos e negativos com considerações quanto a taxa de armadura, carregamentos verticais, relações entre momento fletor e esforço normal, armadura dupla e geometria atribuída aos elementos.

Para o dimensionamento de vigas, a ideia de reduzir a rigidez do elemento é análoga ao que é feito em pórticos, porém, seus valores são determinados pelas equações de equilíbrio da resistência dos materiais. O efeito de fissuração e escoamento dos materiais que constitui ao elemento estrutural é determinante para o seu dimensionamento, por isso, é importante determinar os limites de transição do comportamento dos materiais.

No carregamento de um elemento até sua ruptura, as seções mais solicitadas transitam entre os 3 estádios que configuram os comportamentos dos materiais diante do carregamento aplicado.

O estágio I é caracterizado por toda a seção de concreto e área de aço atuando na resistência dos esforços gerados pois ambos trabalham em regime elástico linear. Assim, a área equivalente de concreto compreende a soma da área de concreto e de aço transformada de modo que os módulos de elasticidades do concreto e do aço tenham uma relação direta como é representada na Equação 11.

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_c} \quad (11)$$

O quadro 2 apresenta as características geométricas configuradas no estágio I para seções “T” ou retangulares ($b_w = b_f$ e $h_f = 0$).

Quadro 2 – Valores das características geométricas da seção no estágio I.

	Expressão
Área (seção homogeneizada)	$A_h = (b_f - b_w) \cdot h_f + b_w \cdot h + A_s \cdot (\alpha_e - 1)$
Centro de gravidade	$y_h = \frac{(b_f - b_w) \cdot \left(\frac{h_f^2}{2}\right) + b_w \cdot \frac{h^2}{2} + A_s (\alpha_e - 1) \cdot d}{A_h}$
Momento de inércia à flexão	$I_h = \frac{(b_f - b_w) \cdot h_f^3}{12} + \frac{b_w \cdot h^3}{12} + (b_f - b_w) \cdot h_f \cdot \left(y_h - \frac{h_f}{2}\right)^2 + b_w \cdot h \cdot \left(y_h - \frac{h}{2}\right)^2 + A_s \cdot (\alpha_e - 1) \cdot (y_h - d)^2$
	Em que: b_f é largura da mesa b_w é largura da alma h é altura da viga h_f é altura da mesa d é a distância da fibra mais comprimida até ao centro de gravidade da barra. A_s é a área de aço tracionado. A'_s é a área de aço comprimido.

Fonte: (CARVALHO e FIGUEIREDO, 2017)

Segundo os autores do quadro 2, a subtração do α_e por 1 é para considerar que na posição da armadura na área de concreto já foi computada.

O estágio II, conforme descrito por Carvalho e Figueiredo (2017), é caracterizado pela desconsideração da zona abaixo da linha neutra devido a tensão atuante nessa região ter ultrapassado a resistência característica do concreto à tração (f_{tk}). Logo, somente o aço nessa região suporta a tensão de tração e a distribuição de tensões de compressão no concreto é

triangular. Para a determinação do início do estágio II, deve-se calcular o momento de fissuração, M_r , dado pela Equação 12.

$$M_r = \frac{\alpha \cdot f_{ct,m} \cdot I_c}{y_t} \quad (12)$$

Em que α é igual 1,2 para seções em forma de “T” ou duplo “T”; 1,3 para seções I ou T invertido e 1,5 para seções retangulares; I_c é o momento de inércia da seção bruta de concreto; $f_{ct,m}$ é a resistência média à tração do concreto; e y_t é a distância do centro gravidade à fibra mais tracionada.

Quando o momento gerado pelos carregamentos aplicados na viga ultrapassar o momento de fissuração, a seção resistente da viga é alterada. A linha neutra é alterada por consequência da perda da zona de concreto abaixo da linha neutra e pode ser calculada conforme apresentado por Ghali & Favre (1986) *apud* Carvalho e Figueiredo (2017) através de uma equação do segundo grau (equação 13). A equação pode ser usada para o cálculo da linha neutra para vigas de seção “T” ou retangular.

$$a_1 \cdot x_{II}^2 + a_2 \cdot x_{II} + a_3 = 0 \quad (13)$$

Em que:

$$a_1 = \frac{b_w}{2} \quad (14)$$

$$a_2 = h_f \cdot (b_f - b_w) + (\alpha_e - 1) \cdot A'_s + \alpha_e \cdot A_s \quad (15)$$

$$a_3 = -d' \cdot (\alpha_e - 1) \cdot A'_s - d \cdot \alpha_e \cdot A_s - \frac{h_f^2}{2} \cdot (b_f - b_w) \quad (16)$$

Sendo d' é a distância da fibra mais comprimida ao centro de gravidade da armadura negativa; d é a distância da fibra mais comprimida ao centro de gravidade da armadura positiva e x_{II} é a distância da linha neutra no estágio II.

Assim, é possível calcular o momento de inércia da seção no estágio II puro através das Equações 17 (T verdadeiro) e 18 (T falso) para seções “T”. Para seções retangulares deve-se considerar $b_w = b_f$ e $h_f = 0$.

$$I_x = \frac{(b_f - b_w) \cdot h_f^3}{12} + \frac{b_w \cdot x_{II}^3}{3} + (b_f - b_w) \cdot \left(x_{II} - \frac{h_f}{2}\right)^2 + \alpha_e \cdot A_s \cdot (x_{II} - d)^2 + (\alpha_e - 1) \cdot A'_s \cdot (x_{II} - d')^2 \quad (17)$$

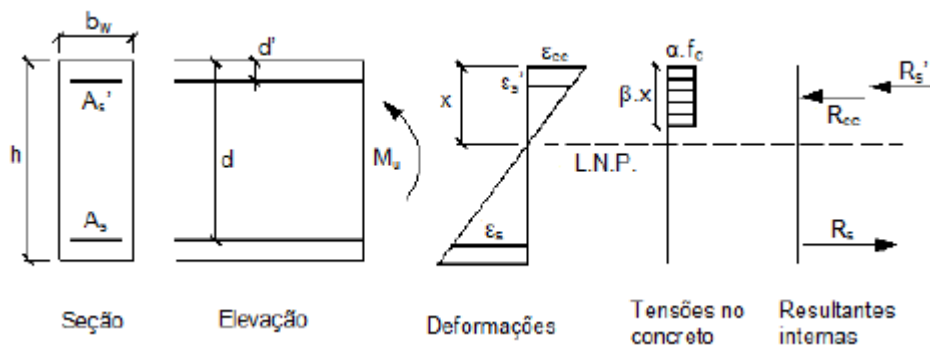
$$I_x = \frac{b_f \cdot x_{II}^3}{3} + \alpha_e \cdot A_s \cdot (x_{II} - d)^2 + (\alpha_e - 1) \cdot A'_s \cdot (x_{II} - d')^2 \quad (18)$$

O estágio III é caracterizado pelo esgotamento do elemento, geralmente governado pelo esgotamento é o concreto, seu início se dá quando o elemento atinge o momento de plastificação, esse que é descrito na Equação 19, essa que foi usada por Silva (2012) em seu experimento.

$$M_y = \frac{f_y \cdot I_{II}}{\alpha_e \cdot (d - x_{II})} \quad (19)$$

Com o momento de plastificação definido calcula-se o momento último, o qual é obtido a partir da resultante interna dos esforços internos. A Figura 9 ilustra as tensões, os esforços e as deformações atuantes numa seção transversal de um elemento de concreto armado.

Figura 9 – Diagrama de tensões e deformações no concreto.



Fonte: (SILVA, 2012)

Através da Equação 20 calcula-se a profundidade da linha neutra x , limite de atuação do concreto comprimido, a partir do equilíbrio dos esforços.

$$A_s \cdot (f_y) = 0.68 \cdot b_w \cdot x \cdot f_c + A'_s (\sigma'_s) \quad (20)$$

Em que f_c e f_y são as resistências à compressão do concreto e à tração do aço, respectivamente. σ'_s é tensão atuante na armadura comprimida e A_s e A'_s são, respectivamente as áreas de aço tracionadas e comprimidas.

Isolando a incógnita x na Equação 20, obtém-se a Equação 21.

$$x = \frac{A_s (f_y) - A'_s (f_y)}{0.68 \cdot b_w \cdot f_c} \quad (21)$$

Para casos em que a viga apresenta armadura comprimida, deve calcular a deformação ocasionada pela armadura comprimida de modo que a mesma acompanhe a deformação do concreto também comprimido. A Equação 22 apresenta a expressão usada para definir a deformação do aço, definida a partir de semelhança de triângulos.

$$\frac{\varepsilon'_s}{x-d} = \frac{\varepsilon_{cc}}{x} \rightarrow \varepsilon'_s = \left(\frac{x-d'}{x} \right) \cdot \varepsilon_{cc} \quad (22)$$

Encontrada a deformação da armadura comprimida, aplicando-se a lei de Hooke, pode-se encontrar a tensão atuante pela equação 23.

$$\sigma'_s = E_s \cdot \varepsilon'_s \quad (23)$$

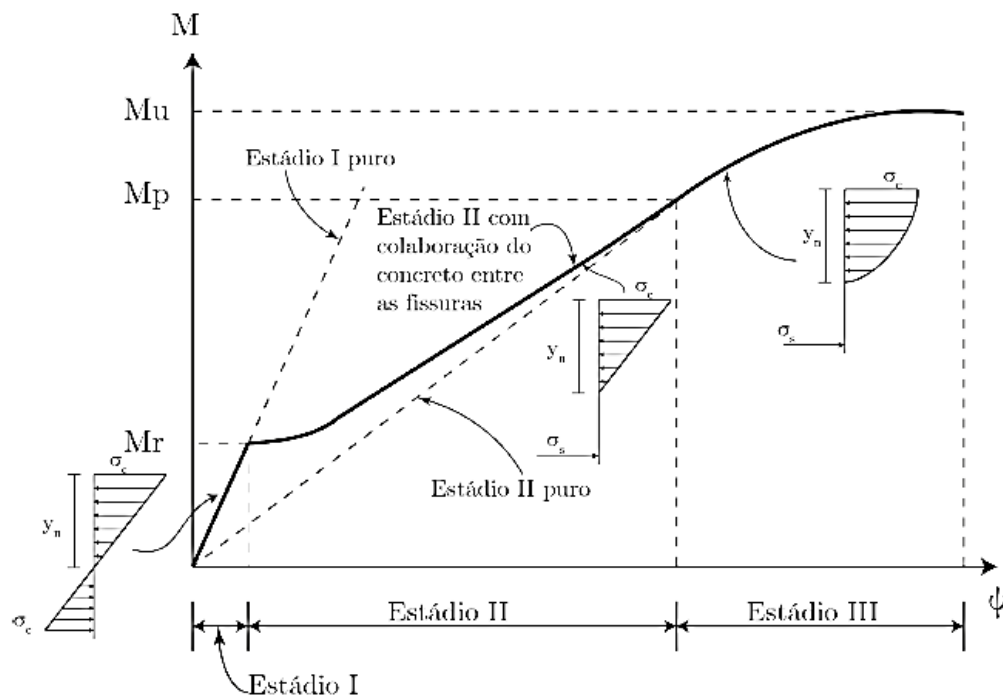
Obtido o valor da tensão atuante na armadura comprimida, deve-se recalcular a altura da linha neutra através da Equação 20, considerando-se a influência da armadura negativa. Dessa forma, o momento último pode ser calculado através da Equação 24.

$$M_u = 0.68 \cdot b_w \cdot x \cdot f_c (d - 0.4 \cdot x) + A'_s \cdot \sigma'_s (d - d') \quad (24)$$

A Equação 24 também pode ser utilizada para vigas sem armadura dupla, ou seja, sem armadura comprimida, basta suprimir o termo do aço comprimido.

A Figura 10 mostra o comportamento da seção de uma viga ao longo do carregamento, em que o eixo vertical representa o momento na seção analisada (M) e o eixo horizontal representa a rotação gerada ϕ pelo deslocamento do eixo longitudinal ao longo dos estádios I, II e III. A figura também demonstra as tensões atuantes na seção transversal ao longo da evolução dos Estádios.

Figura 10 – Diagrama momento curvatura da seção solicitada a flexão simples.



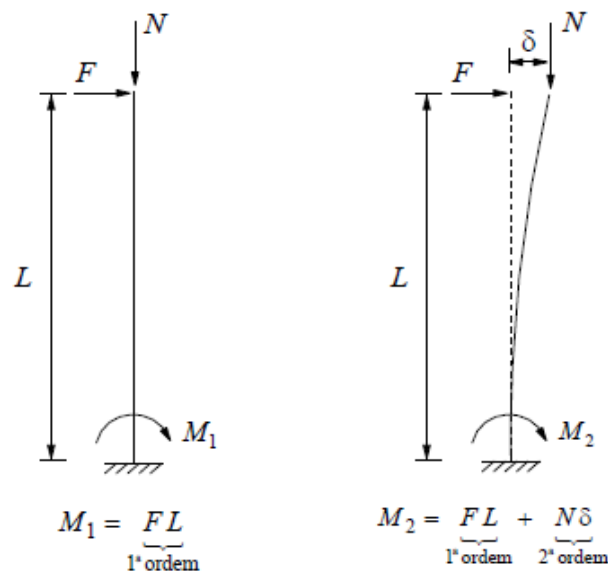
Fonte: (MENDES, 2017)

3.2 NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA

Ao ser imposto carregamento, em qualquer elemento estrutural são geradas deformações que podem implicar em esforços adicionais (Figura 10), denominados de efeitos de segunda ordem. Esse efeito é mais significativo em pilares por conta da aplicação de forças verticais elevadas e geometria propensa a deformação lateral.

A nível de pórticos espaciais ou planos, o conjunto de pilares com suas geometrias, taxas de armaduras e carregamentos podem implicar em deslocamentos variados, levando-se em consideração a não linearidade geométrica, que a depender dessas variáveis podem amplificar os deslocamentos obtidos através de uma análise linear simples.

Figura 11 – Majoração de momentos na base de um pilar devido aos efeitos de segunda ordem.



Fonte: (RIBEIRO, 2016)

A NBR 6118:2014 aponta como efeitos de 2º ordem os esforços adicionais gerados por esses deslocamentos e apresenta métodos simplificados para verificar se há possibilidade de dispensar esses efeitos na análise. A norma divide as estruturas em dois grupos quando se trata dos deslocamentos: estruturas de nós fixos e estruturas de nós móveis.

As estruturas classificadas como nós fixos consideram que toda conjuntura de geometria e características dos materiais favorecem para uma rigidez global propensa a deslocamentos horizontais pequenos, ou seja, que podem ser desprezados os efeitos de segunda ordem. Já nas estruturas classificadas como de nós móveis considera-se que os deslocamentos horizontais não são desprezíveis e deve-se considerar tais efeitos.

Os métodos apresentados na norma são: parâmetro de instabilidade α , que é bastante simplista e fornece somente o resultado se a estrutura é classificada em nó fixos ou móveis. E

o coeficiente γ_z que além de classificar a estrutura quanto aos deslocamentos, fixos ou móveis, fornece um valor para majorar os esforços horizontais a fim de obter os esforços finais considerando a influência dos deslocamentos devido instabilidade geométrica.

No presente estudo, será considerada a não linearidade geométrica através da matriz de rigidez geométrica, a qual modifica a rigidez do elemento de acordo com as cargas axiais atuantes. O efeito da não linearidade geométrica é acentuado em elementos que possuem carga axial atuante internamente por conta da matriz de rigidez geométrica apresenta um termo referente ao esforço axial de cada elemento em que nesse é atualizado a cada incremento.

3.2.1 Matriz de Rigidez Geométrica

A obtenção dos termos da matriz de rigidez geométrica foi realizada tomando-se como principal referência Battista (2011), na qual é apresentado todo o procedimento de obtenção dos termos analisando-se o comportamento em barra.

Para uma barra típica de pórtico plano, onde as dimensões h e b da seção transversal são muito menores que o comprimento L , a deformação específica numa fibra longitudinal qualquer pode ser expressa através da equação 25.

$$\varepsilon'_x = \varepsilon_x + y\chi_x \quad (25)$$

Em que a deformação específica ε_x , a mudança de curvatura χ_x são referidas ao centroide da seção, ou ao eixo x da barra e y é a distância do limite superior e inferior da seção dadas pela Equação 26.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 ; \chi_x = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (26)$$

Assim, a energia de deformação elástica da barra pode ser descrita pela equação 27.

$$U = \frac{EA}{2} \int_0^L \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]^2 dx + \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \quad (27)$$

Em que E é o módulo de elasticidade do material, A é área da seção transversal e I é o momento de inércia da seção relativa ao eixo z .

O potencial de carga externa axial P é dada pela equação 28.

$$\Omega = - \int_0^L (-P) \frac{\partial u}{\partial x} dx = P \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (28)$$

A energia potencial total V é dada pela soma da energia de deformação (Equação 27) e do potencial da carga externa axial (Equação 28).

$$V = U + \Omega = (U_{ext} + U_f) + \Omega \quad (29)$$

Se a configuração original deformada retilínea da barra, sob ação da carga axial P, for perturbada lateralmente pode-se escrever os deslocamentos finais através da Equação 30.

$$u = u^F + u^I; \quad v = v^F + v^I = v^I \quad (30)$$

Em que $u^F = const.$, $v^F = 0$ se referem aos deslocamentos fundamentais da configuração deformada retilínea, e u^I , v^I referem-se aos deslocamentos incrementais da configuração deformada fletida.

Substituindo as Equações (30) na Equação (29) da energia potencial total (V), e abandonando por conveniência de escrita o índice superior $()^I$, tem-se:

$$V(u^F + u; v; P) = V^F + V_1 + V_2 + (V_3 + V_4) \quad (31)$$

onde V^F é uma constante e V_1 e V_2 são, respectivamente, os termos lineares e quadráticos nos deslocamentos u e v e suas derivadas. Esses termos são as 1ª e 2ª variação de V com respeito aos deslocamentos.

Para a formulação da matriz de rigidez não linear, incluindo somente os efeitos de não linearidade geométrica, pode-se desprezar os termos V_3 e V_4 de ordem mais alta que a segunda.

As parcelas da energia potencial total, para a aproximação não linear desejada são dadas pelas Equações 32 e 33.

$$V^F = \frac{EA}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u^F}{\partial x} \right)^2 dx + P \int_0^L \frac{\partial u^F}{\partial x} dx = \frac{3P^2L}{2EA} \quad (32)$$

$$V_1 = \frac{EA}{2} \int_0^L 2 \frac{\partial u^F}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx + P \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (33)$$

A configuração deformada original é uma configuração de equilíbrio já que:

$$u^F = -\frac{P}{EA}x \rightarrow \frac{\partial u^F}{\partial x} = -\frac{P}{EA} \quad (34)$$

$$V_2 = \frac{EA}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u^F}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx + \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (35)$$

que é um funcional quadrático com respeito as derivadas dos deslocamentos incrementais $u(x)$ e $v(x)$.

O campo de deslocamento é dado da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{1(x)} & 0 & 0 & \phi_{4(x)} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{2(x)} & \phi_{3(x)} & 0 & \phi_{5(x)} & \phi_{6(x)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} \quad (36)$$

Em que u_i ($i = 1, \dots, 6$) são os deslocamentos generalizados nos extremos do elemento e $\phi_i =$ ($i = 1, \dots, 6$) são as funções de interpolação que compõem a matriz.

$$\phi = \begin{bmatrix} (1 - \varepsilon) & 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & (2\varepsilon^2 - 3\varepsilon + 1) & L(\varepsilon^2 - 2\varepsilon + \varepsilon) & 0 & (3\varepsilon^2 - 2\varepsilon) & L(\varepsilon^3 - \varepsilon^2) \end{bmatrix} \quad (37)$$

Em que $\varepsilon = \frac{x}{L}$.

Com os deslocamentos $u(x)$ e $v(x)$ dados pela Equação 36 e as funções ϕ_i dadas pela Equação 37, as derivadas do funcional V_2 da Equação 32 são dadas pelas Equações 38 a 39.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{L}(u_4 - u_1) \quad (38)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{L}[6(\varepsilon^2 - \varepsilon)u_2 + (1 - 4\varepsilon + 3\varepsilon^2)Lu_3 + 6(\varepsilon - \varepsilon^2)u_5 + (3\varepsilon^2 - 2\varepsilon)Lu_6] \quad (39)$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial x^2} = \frac{1}{L^2}[6(2\varepsilon - 1)u_2 + 2(3\varepsilon - 2)Lu_3 + 6(1 - 2\varepsilon)u_5 + 2(3\varepsilon - 1)Lu_6] \quad (40)$$

Substituindo as Equações 38 a 40 na Equação 35 e calculando a integral obtém-se V_2 em termos de $u_1, \dots, u_6$. E aplicando o 1º Teorema de Castigliano na expressão quadrática da energia potencial total, tem-se:

$$\frac{\partial V_2}{\partial u_i} = f_i^L \quad ; \quad i = 1, \dots, 6 \quad (41)$$

Em que f_i^L são as componentes do vetor f^L de forças nodais, que se relacionam com os deslocamentos nodais u_i do elemento conforme Equação 42.

$$f^L = k^L u; \text{ ou ainda, } f^L = (k_e^L + k_G^L)u. \quad (42)$$

Por fim, pode-se escrever a matriz de rigidez geométrica dada pela equação 43 em que P representa o esforço normal atuante no elemento.

$$K_G = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5L} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{2L}{15} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{L}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{L}{30} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2L}{15} \end{bmatrix} \quad (43)$$

Dada a relação dos esforços internos, incluindo-se o esforço normal com os carregamentos externos aplicados, geralmente nas análises não lineares os carregamentos externos são aplicados de forma incremental. Ao passo em que frações dos carregamentos são aplicadas atualiza-se a matriz de rigidez antes da aplicação do próximo incremento de carregamento.

Notadamente, se a atualização da matriz de rigidez não for significativa face os termos lineares a resposta da análise, ainda que de forma incremental, fornecerá uma resposta linear.

4 ESTUDOS DE CASO – APLICAÇÕES DO PROGRAMA DESENVOLVIDO

O desenvolvimento do programa se deu em etapas e de forma continuada, inicialmente foram implementadas as formulações para análise linear, seguida da análise não linear geométrica e, por último, a análise não linear física.

Ao término de cada etapa foram feitas algumas aplicações para validação das implementações realizadas. Para fins de organização, o programa aqui desenvolvido será denominado simplifcadamente de **NAP** (*Nonlinear Analysis Program*).

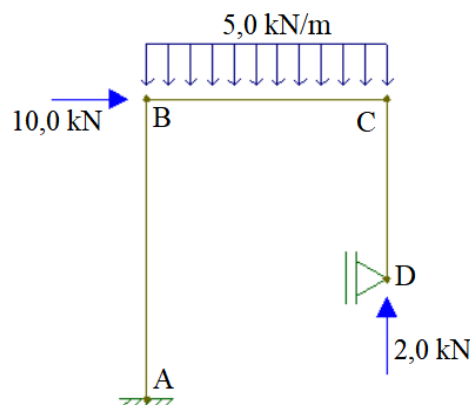
4.1 APLICAÇÃO I – ANÁLISE LINEAR

Para validar o programa desenvolvido neste trabalho em relação a análise estática linear, indispensável para qualquer tipo de análise, foi modelado o pórtico mostrado na Figura 12 e os resultados foram comparados com as respostas fornecidas no programa FTool, *software* de distribuição gratuita e largamente utilizado em cursos de graduação.

O modelo possui carregamentos pontuais e distribuídos e apoios rígidos, únicas condições de carregamentos previstas para as aplicações inicialmente planejadas. O módulo de elasticidade longitudinal foi adotado igual a 20 GPa, a seção transversal foi considerada retangular com dimensões iguais a 20 cm x 50 cm, as barras AB, BC e CD possuem comprimentos, respectivamente, iguais a 4,0 m, 3,0 m e 3,0 m.

Os resultados das reações de apoio, esforços internos e deslocamentos são apresentados, respectivamente, nas Tabelas 1, 2 e 3. Verifica-se que os resultados obtidos são idênticos em ambos os programas.

Figura 12 – Pórtico para validação da análise linear.



Fonte: (O AUTOR, 2020)

Tabela 1 – Reações de apoio

Reações	Reações no Nó A		Reações no Nó D	
	NAP	FTool	NAP	FTool
R _x (kN)	-12,93	-12,93	2,93	2,93
R _y (kN)	13,00	13,00	0,0	0,0
M _z (kNm)	59,43	59,43	0,0	0,0

Fonte: (O AUTOR, 2020)

Tabela 2 – Esforços internos

Elem.	NÓ	Normal (kN)		Cortante (kN)		Momento Fletor (kNm)	
		NAP	FTool	NAP	FTool	NAP	FTool
AB	A	-13,00	-13,00	12,93	12,93	-59,43	-59,43
	B	-13,00	-13,00	12,93	12,93	-7,70	-7,70
BC	B	2,93	2,93	13,00	13,00	-7,70	-7,70
	C	2,93	2,93	-2,00	-2,00	8,80	8,80
CD	C	-2,00	-2,00	-2,93	-2,93	8,80	8,80
	D	-2,00	-2,00	-2,93	-2,93	0,00	0,00

Fonte: (O AUTOR, 2020)

Tabela 3 – Deslocamentos

Nó	Deslocamentos ($\times 10^{-3}$)					
	Horizontal (m)		Vertical (m)		Rotação (rad)	
	NAP	FTool	NAP	FTool	NAP	FTool
A	0,00	0,00	0,0	0,0	0,0	0,0
B	8,10	8,10	-56,78	-56,78	-3,22	-3,22
C	8,11	8,11	-9,53	-9,53	-2,91	-2,91
D	0,00	0,00	-9,52	-9,52	-2,60	-2,60

Fonte: (O AUTOR, 2020)

4.2 APLICAÇÃO II – ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA

A validação do programa desenvolvido neste trabalho em relação a análise estática não linear geométrica consiste na verificação do deslocamento no centro de uma coluna bi-rotulada comprimida. Os resultados obtidos foram então comparados com os valores obtidos pela Equação 44, a qual expressa o deslocamento no centro da barra considerando a influência da perda da capacidade portante por conta da flambagem da barra.

$$y_{m\acute{a}x} = e \left(\sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} - 1 \right) \quad (44)$$

Em que $y_{m\acute{a}x}$ é o deslocamento lateral máximo no centro da barra, P é a carga atuante na barra e P_{cr} é a carga crítica na qual ocorre o esgotamento do elemento.

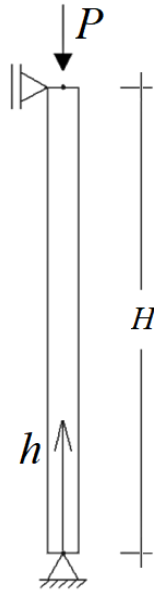
A carga crítica pode ser obtida pela Equação 45.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2} \quad (45)$$

O modelo desenvolvido consiste numa coluna (Figura 13) com características relativas a uma estrutura de madeira. O módulo de elasticidade foi adotado igual a 9,5 GPa, seção

transversal de 20 cm x 20 cm e comprimento igual a 3,4 m. Além disso, foi previsto uma deformação pré-existente com formato senoidal (Equação 46) cuja intensidade máxima é igual a 10 mm no meio da coluna.

Figura 13 – Coluna comprimida.



Fonte: (CONCEIÇÃO, 2020)

$$v(h) = e \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot h}{H}\right) \quad (46)$$

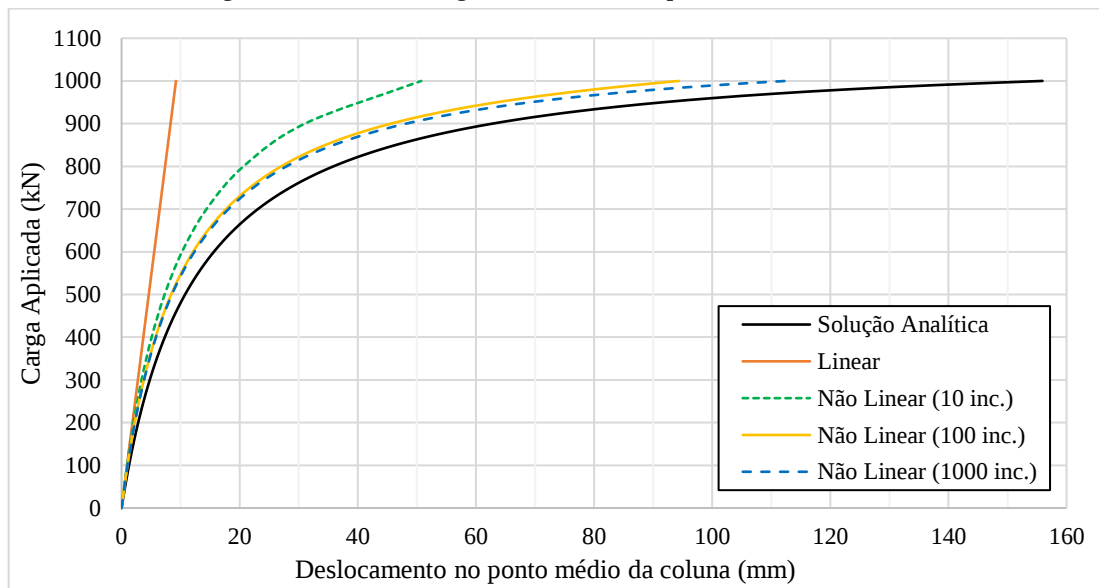
Em que $v(h)$ é o deslocamento lateral inicial dado na cota h da coluna de altura total igual a H (3,40 m) e e é a excentricidade máxima (10 mm).

O modelo foi inserido no programa com 35 nós, 34 elementos com comprimentos iguais a 10 cm e demais características físicas e geométricas indicadas anteriormente. Calculando-se a carga crítica através da equação 45 obtém-se o valor igual a 1081,44 kN, por esta razão a carga P foi considerada igual a 1000 kN, valor suficiente para identificação do comportamento não linear e ao mesmo tempo evitar eventuais instabilidades numéricas (*overflow*).

O gráfico mostrado na Figura 14 apresenta os resultados obtidos através da equação 44 e utilizando o programa *NAP*. A análise não linear foi realizada através do processo incremental e para fins de comparação considerou-se o número de incrementos com valores iguais a 1 (análise linear, carga total aplicada de uma única vez), 10, 100 e 1000.

Do gráfico, verifica-se o forte comportamento não linear do modelo desenvolvido, haja visto que a solução linear apresenta grande disparidade com os demais resultados, sendo significativamente menor sobretudo para maiores de carregamento.

Figura 14 – Gráfico Carga x Deslocamento para a coluna analisada



Fonte: (O AUTOR, 2020)

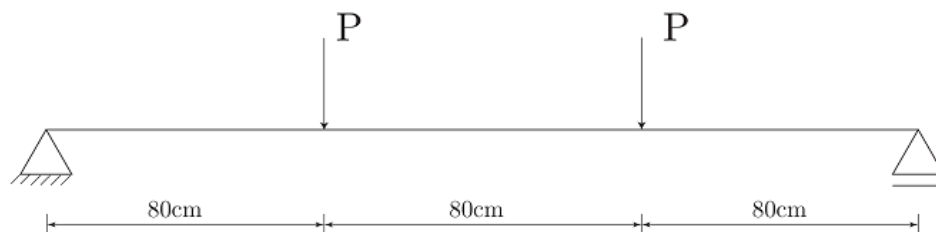
Comparando-se os resultados obtidos através da solução analítica (Equação 44) e a análise numérica, verifica-se que a quantidade de incrementos é bastante expressiva para obtenção dos deslocamentos finais, quanto maior o número de incrementos (divisões do carregamento) mais a curva se aproxima da solução analítica.

Por fim, conclui-se pela validação da formulação implementada.

4.3 APLICAÇÃO III – ANÁLISE NÃO LINEAR FÍSICA

Para validação da implementação da não linearidade física utilizou-se um experimento bastante difundido na literatura, pode-se encontrá-lo em Silva (2012) e Mendes (2017), por exemplo. Trata-se da viga biapoada com duas cargas pontuais apresentada na Figura 15 e que fora ensaiada experimentalmente por Álvares (1993) *apud* Mendes (2017).

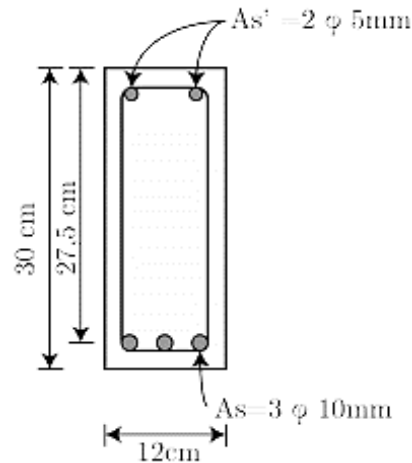
Figura 15 – Viga bi apoiada com duas cargas pontuais.



Fonte: (MENDES, 2017)

A seção transversal da viga é apresentada na Figura 16 e as propriedades mecânicas são apresentadas na Tabela 4.

Figura 16 – Seção da viga bi apoiada



Fonte: (MENDES, 2017)

Tabela 4 – Propriedades mecânicas do modelo da aplicação III

Propriedade	Valor (kN/cm ²)
Módulo de elasticidade tangente inicial do concreto (E_{ci})	2920,0
Módulo de elasticidade do aço (E_s)	19600,0
Resistência do concreto à tração direta (f_{ct})	0,204
Resistência à compressão do concreto (f_c)	2,55
Resistência ao escoamento do aço (f_y)	50,0

Fonte: (SILVA, 2012)

Os valores obtidos para o momento de fissuração (M_r), Momento de plastificação (M_p) e Momento de resistência última (M_u) para Silva (2012), Mendes (2017) e através do programa NAP são apresentados na Tabela 5. Como dito anteriormente, esses valores tem a importância de referenciar a mudança de estágio que o elemento estrutural sofre durante o carregamento e assim analisar o comportamento do mesmo.

Tabela 5 – Valores dos momentos de fissuração, plastificação e último para a viga de 3 Ø10.0

Viga (3 Ø10.0)	Silva (2012) (kN.cm)	Mendes (2017) (kN.cm)	Programa NAP (kN.cm)
M_r	641,00	639,80	625,19
M_p	2940,00	2953,60	2959,12
M_u	3022,00	2966,30	3034,48

Dadas as dimensões da seção transversal e o peso específico do concreto igual a 25 kN/m³, o carregamento utilizado como peso próprio da estrutura foi considerado igual a 0,9 kN/m. Enquanto a intensidade das cargas P ilustradas na Figura 15 variaram até o valor de 40

kN, valor coerente com o esperado para o estado limite último da viga dado o estudo de Álvares (1993) *apud* Mendes (2017).

Com todos os dados referentes a viga do experimento, pode-se iniciar a inserção dos dados no algoritmo. O modelo foi criado com 13 nós, resultando em 12 elementos com comprimentos iguais a 20 cm. Em seguida foram adicionados os dados referentes a seção da viga como altura, largura, localização e áreas das armaduras tracionadas e comprimidas.

Os valores calculados na tabela 5 foram utilizados para alterar a inércia da seção durante o carregamento de modo que representasse a mudança de estádios. Tal qual realizado na análise não linear geométrica os carregamentos foram aplicados de forma incremental.

A inércia da viga no estágio I foi calculada conforme o quadro 2, a inércia no estágio II foi calculada conforme a Equação 17 e o estágio III, foi utilizado o momento último ilustrado na equação 24 para encontrar a rigidez equivalente ao esgotamento do elemento. O módulo de elasticidade foi mantido constante durante todo o carregamento.

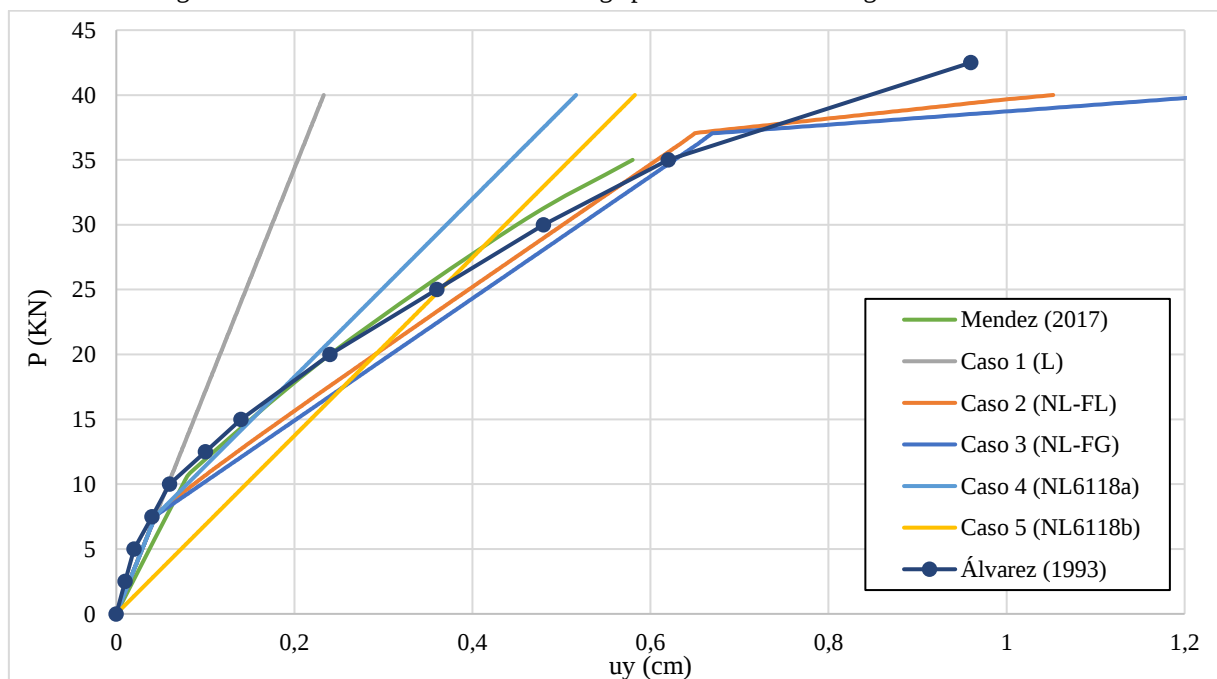
Para esta aplicação foram modeladas cinco considerações distintas para análise:

- Caso 1 (L) – Análise Linear – O carregamento foi aplicado em sua totalidade de uma única vez resultando numa análise linear;
- Caso 2 (NL-FL) – Análise Não Linear – O carregamento foi aplicado de maneira incremental e a cada incremento fora verificado os momentos atuantes nos elementos. Caso o momento atuante em algum dos elementos ultrapasse um dos valores apresentados anteriormente (M_r , M_p ou M_u), a inércia é recalculada conforme formulações de Ghali & Favre unicamente para este elemento (fissura localizada);
- Caso 3 (NL-FG) – Análise Não Linear – O carregamento foi aplicado de maneira incremental e a cada incremento fora verificado os momentos atuantes nos elementos. Caso o momento atuante em quaisquer dos elementos ultrapasse um dos valores apresentados anteriormente (M_r , M_p ou M_u), a inércia é recalculada de acordo com Ghali & Favre para todos os elementos (fissura generalizada);
- Caso 4 (NL-6118a) – Análise Não Linear – O carregamento foi aplicado de maneira incremental e a cada incremento fora verificado os momentos atuantes nos elementos. Caso o momento atuante em algum dos elementos ultrapasse o valor de M_r , a inércia é recalculada unicamente para este elemento conforme indicações da NBR6118:2014 e apresentadas no Quadro 1;

- Caso 5 (NL-6118b) – Análise Não Linear – Neste caso, considerou-se a dubiedade apresentada na NBR 6118:2014 em relação de qual momento deve-se considerar a redução das rigidezes, assim desde o carregamento inicial a rigidez já fora considerada reduzida.

Os resultados obtidos para os casos citados acima, bem como os obtidos nos trabalhos de Mendes (2017) e Álvares (1993) *apud* Mendes (2017) estão compilados no gráfico da Figura 17. Acrescenta-se que em todas as análises realizadas no programa *NAP* e ditas não lineares considerou-se o número de incrementos igual a 1000 e em todos casos considerou-se as mesmas propriedades mecânicas indicadas na Tabela 4.

Figura 17 – Deslocamentos no meio da viga para os casos de carregamento analisados



Fonte: (O AUTOR, 2012)

Destaca-se que o trabalho de Álvares (1993) *apud* Mendes (2017) foi experimental e, portanto, é coerente tomá-lo como principal referência nas comparações. Em relação ao trabalho de Mendes (2017) trata-se de um trabalho numérico com formulação similar à que foi utilizada no presente trabalho, porém a formulação utilizada foi mais rebuscada, as propriedades foram recalculadas a cada incremento de carga através do equilíbrio dos esforços solicitantes, não apenas quando atingido os momentos limites dos estádios.

Verifica-se que a análise linear (caso 1) apresenta boa correlação com as demais análises apenas até atingir o momento de fissuração. A partir deste ponto, os resultados obtidos são inferiores a todos outros, representando uma situação desfavorável a segurança.

Notadamente os casos 2 e 3 representam uma análise mais crítica por considerar todo o processo de degradação que ocorre por conta da fissuração do concreto e escoamento das armaduras, ou seja, uma forma mais próxima da realidade. Verifica-se no gráfico da Figura 17 que dentre os casos analisados são aqueles que mais se aproximam dos resultados de Álvares (1993).

O caso referente a NBR6118:2014, caso 4, o qual considerada a redução da rigidez apenas após o momento de fissuração, apresenta boa correlação com os resultados de Álvares (1993) para os carregamentos iniciais, contudo ao passo em que se aumenta o carregamento as respostas não são mais satisfatórias.

O outro caso referente a NBR6118:2014, caso 5, apesar de ser dito não linear, verdadeiramente resulta numa análise linear haja visto que foi considerado a inércia reduzida desde o início e constante durante todo o carregamento. Verifica-se no gráfico da Figura 17 que este modelo é mais conservador para os carregamentos iniciais, porém mostra-se inferior à medida em que se aumenta o carregamento.

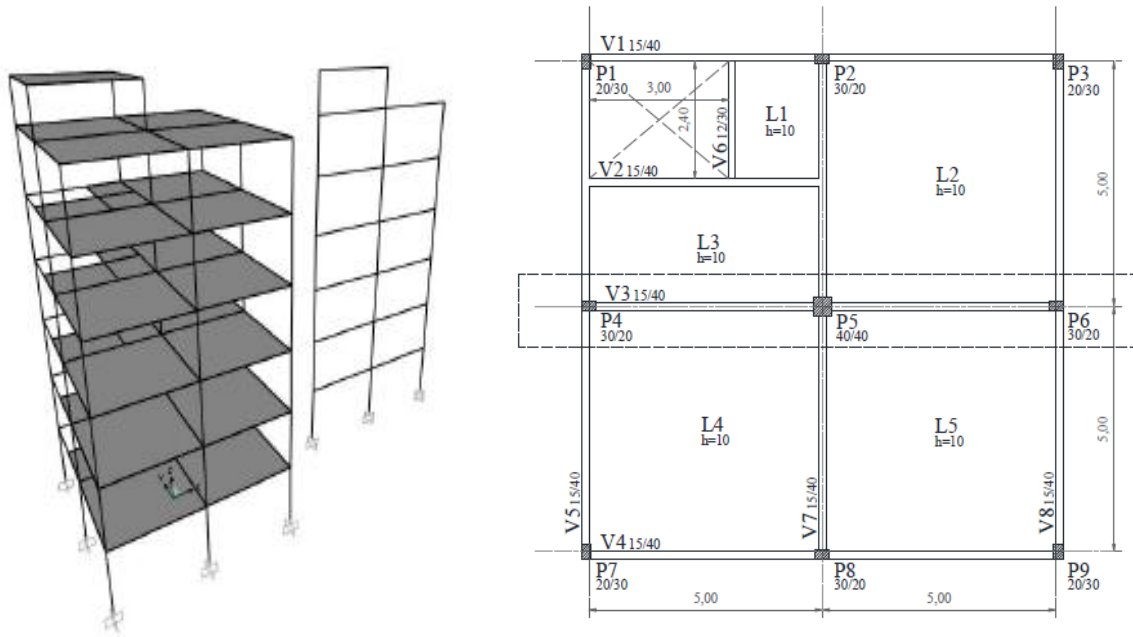
Analisando-se os resultados obtidos por Mendes (2017) verifica-se uma boa correlação com os resultados de Álvares (1993), contudo os resultados aparentemente apenas contemplam o limite do estágio II. A formulação mais refinada utilizada neste trabalho (caso 2), embora composta de simples redução das rigidezes quando alcançados os limites dos estágios, apresenta boa correlação com os resultados de Mendes (2017), a qual utilizou uma formulação mais rebuscada.

Por fim, conclui-se que as formulações implementadas para análise não linear física são satisfatórias apresentando boa correlação com os resultados experimentais disponíveis na literatura.

4.4 APLICAÇÃO IV – ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURA APORTICADA

A quarta aplicação consiste no estudo de caso realizado por Ribeiro (2016), o qual consiste em modelar um edifício comercial de seis pavimentos e isolar um pórtico plano da edificação para análise (Figura 18). A autora adotou o pórtico do centro e validou a equivalência com o modelo completo através de análises feitas nos *softwares* SAP2000 e TQS.

Figura 18 – Ilustração do pórtico extraído e planta baixa padrão.



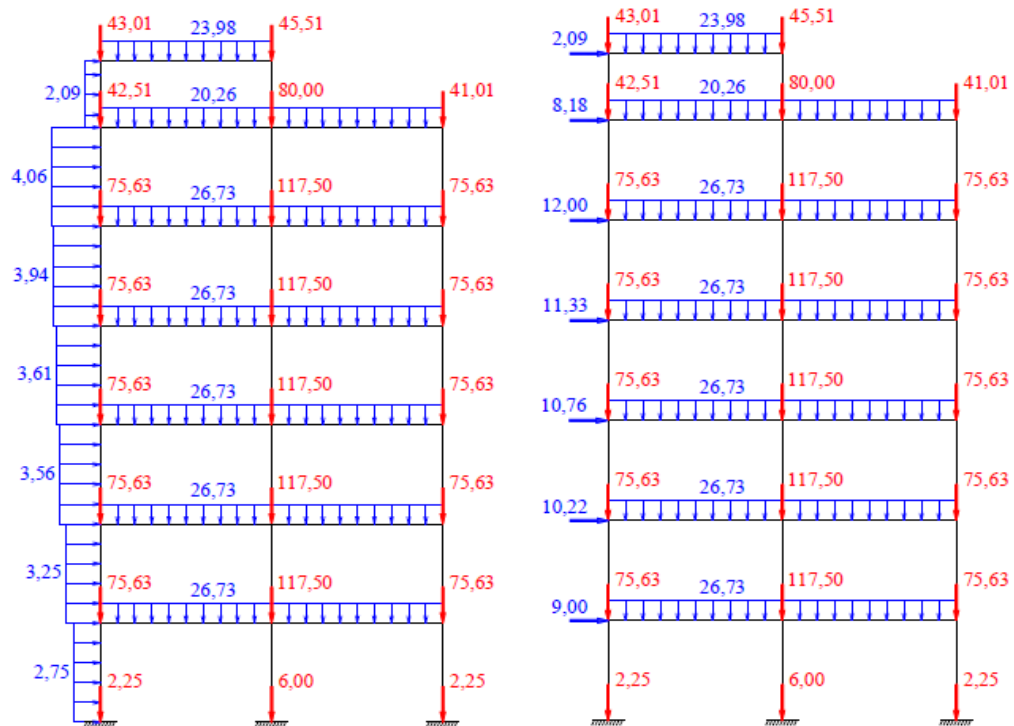
Fonte: (RIBEIRO, 2016)

Os carregamentos utilizados estão representados na Figura 19 e contemplam as cargas permanentes e acidentais previstas nas normas vigentes à época, sendo ainda aplicado o carregamento de vento conforme prescrições da NBR 6123 (ABNT, 1988), o qual contribui significativamente para o comportamento geometricamente não linear da estrutura. A distribuição dos carregamentos das lajes nas vigas foi feita por meio do método das charneiras plásticas.

As propriedades mecânicas atribuídas aos elementos estruturais referem-se à resistência à compressão igual a 25 MPa. O módulo de elasticidade secante não foi informado em números exatos, porém há a indicação que o valor foi calculado seguindo as prescrições da NBR 6118:2014, resultando no valor de 24 GPa. As propriedades geométricas dos elementos estruturais foram obtidas com base nas informações da planta baixa ilustrada na Figura 18.

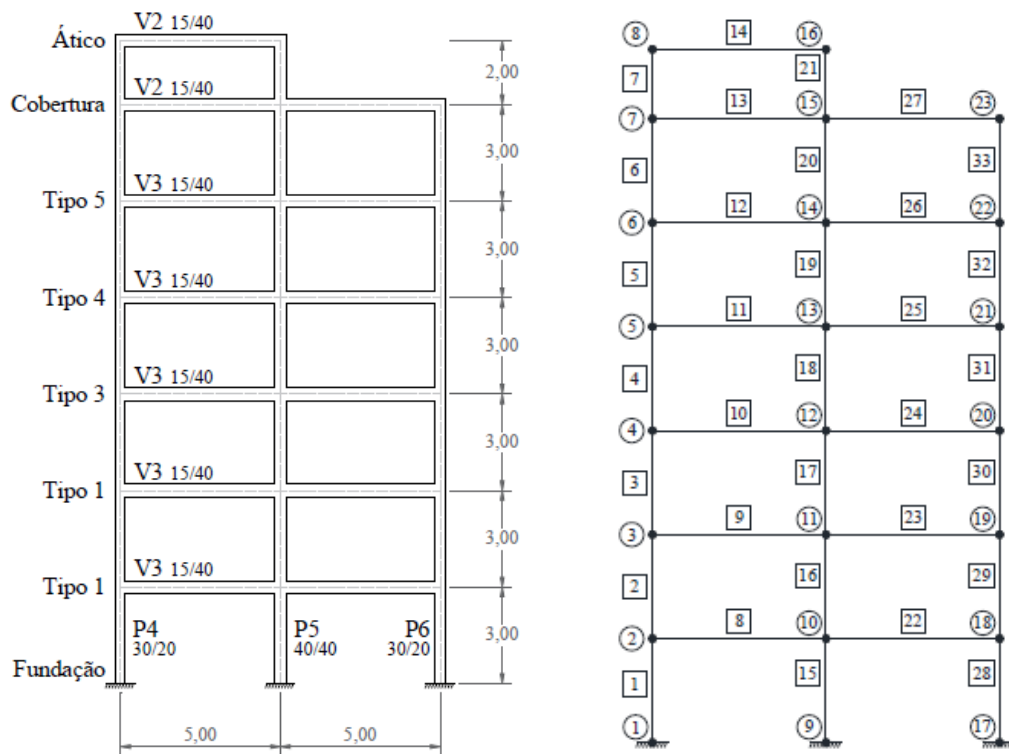
As distâncias entre os elementos foram seguidas conforme a Figura 20. Para o modelo discretizado do pórtico, a numeração dos nós e elementos (Figura 20) foram inseridos com os mesmos valores utilizados por Ribeiro (2016) a fim de comparar de forma facilitada os resultados obtidos.

Figura 19 – Distribuição e valores dos carregamentos atuantes.



Fonte: (RIBEIRO, 2016)

Figura 20 – Distância dos elementos e discretização do modelo de pórtico.



Fonte: (RIBEIRO, 2016)

O programa utilizado por Ribeiro (2016) para encontrar os resultados da análise não linear considerando a atualização incremental da matriz de rigidez geométrica foi o *NAESY*. Esse programa fornece resultados calculados em um pórtico plano no qual foi inserida a matriz de rigidez geométrica, tal qual o programa desenvolvido neste trabalho intitulado *NAP*.

O número de incrementos utilizado neste exemplo foi igual a 100, acima deste valor o programa apresentou constância nas respostas. A não linearidade física consistiu na redução da rigidez dos respectivos elementos seguindo as prescrições da NBR 6118:2014 (conforme caso 5 utilizado no item 4.3), não havendo, portanto, redução da inércia nas mudanças de estágio. Apesar de não ser o melhor modelo para não linearidade física conforme visto anteriormente, adotou-se esse modelo por ter sido o mesmo utilizada por Ribeiro (2016), além disso para a verificação da redução de rigidez entre os estádios seria necessário conhecer as armaduras dos elementos, que não foram indicadas no trabalho.

Os valores obtidos para os deslocamentos e esforços são apresentados nas tabelas 6 e 7, respectivamente. Verifica-se que os valores se apresentam próximos. Destaca-se que o processo de cálculo utilizado por Ribeiro (2016) foi o incremental-iterativo, enquanto no presente trabalho consistiu somente no processo incremental.

Tabela 6 – Comparação entre os deslocamentos do algoritmo e Ribeiro (2016).

Nó	ux (cm)			uy (cm)			rz (rad)		
	NAESY	NAP	Diferença (%).	NAESY	NAP	Diferença (%).	NAESY	NAP	Diferença (%).
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2	0,91	0,89	1,93	-0,22	-0,17	20,07	-0,53	-0,52	1,77
3	2,50	2,45	1,70	-0,40	-0,32	19,89	-0,54	-0,54	1,65
4	3,97	3,91	1,48	-0,56	-0,45	19,92	-0,48	-0,47	1,17
5	5,10	5,04	1,32	-0,68	-0,54	19,87	-0,37	-0,37	1,22
6	5,83	5,77	1,15	-0,76	-0,61	19,85	-0,28	-0,29	-0,83
7	6,16	6,12	0,72	-0,81	-0,65	19,88	-0,10	-0,10	1,02
8	6,27	6,22	0,74	-0,83	-0,66	19,87	-0,24	-0,23	3,81
9	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
10	0,91	0,89	1,70	-0,16	-0,13	20,15	-0,43	-0,43	0,76
11	2,49	2,45	1,48	-0,29	-0,23	20,11	-0,48	-0,47	1,00
12	3,97	3,91	1,38	-0,40	-0,32	20,05	-0,40	-0,39	0,55
13	5,10	5,03	1,21	-0,48	-0,39	20,01	-0,28	-0,28	-0,19
14	5,82	5,76	1,03	-0,54	-0,43	20,09	-0,15	-0,15	-0,68
15	6,17	6,12	0,81	-0,57	-0,45	20,03	-0,08	-0,09	-8,64
16	6,24	6,21	0,50	-0,58	-0,46	20,14	0,06	0,05	25,00
17	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
18	0,92	0,90	2,14	-0,22	-0,18	20,11	-0,19	-0,19	-0,32
19	2,49	2,45	1,45	-0,41	-0,33	19,85	-0,28	-0,28	-0,21
20	3,96	3,91	1,34	-0,55	-0,44	19,75	-0,21	-0,21	-0,33
21	5,09	5,03	1,20	-0,65	-0,52	19,75	-0,11	-0,11	-1,83
22	5,82	5,76	1,03	-0,71	-0,57	19,75	-0,01	0,00	91,67
23	6,15	6,11	0,64	-0,74	-0,59	19,80	0,14	0,13	5,25

Os valores obtidos no programa *NAP* para os esforços e apresentados na Tabela 7 consistem nos esforços obtidos no início do elemento, considerando o início da esquerda para direita, nos elementos na horizontal, e de baixo para cima nos elementos na vertical, enquanto no referido trabalho, a autora afirmou ter extraído o valor no final dos elementos. Porém, foi verificada uma boa concordância nos resultados.

Tabela 7 – Comparação entre os esforços do algoritmo e Ribeiro (2016).

Nº do elemento	Normal (kN)			Cortante (kN)			Momento fletor (kN.m)		
	NAESY	NAP	Diferença (%).	NAESY	NAP	Diferença (%).	NAESY	NAP	Diferença (%).
1	817,80	822,27	0,55	4,12	2,87	30,31	20,85	20,78	0,33
2	693,50	697,69	0,60	-1,10	-3,02	174,35	-1,37	-1,29	5,90
3	570,90	574,47	0,62	-2,10	-3,50	66,76	-4,95	-4,73	4,41
4	446,20	448,91	0,61	-5,37	-6,19	15,34	-11,04	-10,94	0,93
5	317,70	319,54	0,58	-9,36	-9,98	6,64	-16,54	-16,69	0,90
6	185,40	186,46	0,57	-8,97	-8,64	3,67	-18,69	-18,16	2,82
7	97,65	98,16	0,52	-27,24	-28,16	3,38	-21,36	-22,53	5,49
8	2,59	2,58	0,36	-17,70	-17,86	0,92	-45,84	-46,14	0,66
9	10,08	10,12	0,42	-19,11	-19,23	0,64	-48,79	-49,03	0,50
10	8,62	8,58	0,42	-16,82	-16,90	0,47	-43,30	-43,47	0,39
11	8,25	7,97	3,41	-13,07	-13,08	0,07	-34,09	-34,04	0,16
12	12,96	13,62	5,05	-9,38	-9,38	0,04	-25,46	-25,49	0,14
13	-9,95	-11,25	13,08	-4,95	-4,85	1,92	-12,63	-12,26	2,92
14	29,39	30,29	3,05	-4,94	-4,82	2,49	-16,84	-16,23	3,64
15	1584,00	1587,59	0,23	45,40	43,57	4,03	125,40	126,47	0,86
16	1327,00	1329,63	0,20	37,33	33,94	9,07	62,35	62,70	0,56
17	1070,00	1072,47	0,23	28,64	26,31	8,14	32,10	32,92	2,54
18	813,20	814,65	0,18	19,95	18,64	6,59	14,28	15,03	5,24
19	555,90	556,59	0,12	13,30	13,29	0,07	2,67	3,68	37,98
20	298,00	298,22	0,07	0,06	-0,67	1214,33	-9,42	-9,47	0,55
21	110,10	110,26	0,15	29,04	30,32	4,42	0,27	2,85	957,37
22	-7,65	-8,03	4,95	-10,74	-11,07	3,09	-30,44	-31,25	2,66
23	3,05	3,27	7,13	-12,76	-13,20	3,42	-34,92	-35,96	2,98
24	2,07	1,91	7,58	-9,77	-10,20	4,43	-27,30	-28,36	3,90
25	3,24	3,42	5,52	-5,72	-6,16	7,63	-16,94	-18,04	6,49
26	0,55	0,13	76,57	-1,70	-2,14	26,10	-6,36	-7,40	16,42
27	19,48	19,89	2,11	2,24	1,80	19,78	2,25	1,12	50,14
28	838,90	844,88	0,71	22,99	21,73	5,46	39,79	39,97	0,45
29	686,10	691,31	0,76	31,65	30,25	4,44	49,80	50,59	1,58
30	531,60	535,67	0,77	27,64	26,53	4,00	39,45	39,86	1,03
31	380,30	383,03	0,72	24,40	24,09	1,29	33,76	34,44	2,01
32	232,80	234,44	0,70	20,33	20,27	0,28	27,87	28,35	1,71
33	89,21	89,85	0,72	19,32	19,93	3,18	24,68	25,64	3,87

Tanto os deslocamentos como os esforços obtidos foram próximos. Nos casos que apresentaram maiores diferenças nas porcentagens justifica-se pelos valores serem próximos de zero. Embora a diferença relativa seja grande, a diferença absoluta é pequena.

5 CONCLUSÕES

Análises estruturais através de implementação computacional vêm crescendo bastante devido a evolução tecnológica. Com o presente trabalho pode-se observar que a implementação computacional se mostrou satisfatória apresentando resultados coerentes quando analisados com trabalhos disponíveis na literatura.

Na análise não linear geométrica, foi utilizado somente incrementos quando atribuída na análise dos exemplos, ou seja, o carregamento total foi dividido em partes iguais, incrementado e armazenado seu deslocamento, os resultados se mostraram satisfatórios quando comparados com os exemplos que utilizaram a análise incremental-iterativa.

Na análise não linear física, o método atribuído ficou restrito a mudança de inércia a cada estágio, com tudo, os resultados comparados se mostraram satisfatórios quando comparados com métodos que corrigiam a inércia durante o carregamento, independente da mudança de estágio.

Algumas limitações foram observadas durante a implementação nos exemplos por falta de informações que direcionavam a elaboração dos métodos avançados do algoritmo quando foi implementado a não linearidade física e geométrica, por isso, a verificação usada no presente trabalho ficou limitada em métodos intermediários.

A implementação computacional usada no presente trabalho se mostrou bastante eficaz, a contribuição que muitos estudos vêm dando também contribui para que se possa ser usada dimensionamento de projetos e validação dos mesmos.

Por fim, de acordo com os resultados apresentados verifica-se que alguns casos as respostas obtidas nas análises não lineares apresentam respostas muito superiores às análises lineares. Esse acréscimo nos deslocamentos ou esforços podem resultar numa situação desfavorável à segurança, devendo ser analisado criteriosamente.

5.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Algumas sugestões para a continuidade deste trabalho são listadas a seguir:

- a) Configurar o algoritmo para análise não linear física e geométrica em pórticos tridimensionais;
- b) Na análise não linear física, atribuir métodos avançados que calculem a inércia da seção conforme o carregamento é aplicado no elemento estrutural e considerar o esgotamento do elemento estrutural;

- c) Na análise não linear geométrica atribuir a análise iterativa a cada incremento calculado;
- d) Na análise não linear física e geométrica em pórticos planos fazer a verificação da implementação da não linearidade física com a mudança de inércia ao longo do carregamento em cada elemento e comparar os deslocamentos finais com métodos simplificados utilizados no dia-a-dia;
- e) Inserir a interação solo-estrutura na análise não linear;
- f) Calcular a quantidade de aço requerida pelo dimensionamento estrutural e recalcular considerando os efeitos da não linearidade física e geométrica do elemento e verificar os deslocamentos.

REFERÊNCIAS

- ÁLVARES, Manuel Silva. **Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com o emprego do método dos elementos finitos**. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 1993.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118 – Projeto de estruturas de concreto – Procedimento**. Rio de Janeiro, 2014.
- BATTISTA, R. C. **Notas de aula da disciplina Análise Estrutural**. Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.
- CARVALHO, R. C.; FIGUEIREDO, J. R. **Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado**. 4. ed. São Paulo: EdUFSCar, 2017.
- CONCEIÇÃO, R. S. **Notas de aula da disciplina Análise Estrutural**. Curso de Engenharia Civil – Instituto Federal de Sergipe, Aracaju, Sergipe, 2020.
- MARTHA, L. F. **Análise de Estruturas: Conceitos e Métodos Básicos**. Elsevier, Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.
- MENDES, T. M. P. **Análise não-linear física e geométrica de sistemas aporticados com elementos de rigidez variável em concreto armado**. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil na área de concentração em Construção Metálica, Escola de Minas, PROPEC, 2017.
- OLIVEIRA, D. M. **Estudo dos Processos Aproximados Utilizados para a Consideração das não-Linearidades Física e Geométrica na Análise Global das Estruturas de Concreto Armado**. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2007.
- PINTO, R. S.; RAMALHO, M. A. **Não-Linearidade Física e Geométrica no Projeto de Edifícios Usuais de Concreto Armado**. Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Carlos, n. 19, p. 171-206, 2002.
- PFEIL, W.; PFEIL, M. S. **Estruturas de aço: dimensionamento prático**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.
- RIBEIRO, I. S. **Análise não-linear geométrica de sistemas aporticados planos com elementos de rigidez variável – aplicações em estruturas de aço e de concreto armado**. Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, 2016.
- SILVA, A. A. E. F. **Contribuições ao Estudo da Não-Linearidade Física em Vigas de Concreto Armado**. Tese de mestrado da Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria - Rio Grande do Sul, 2012.
- SORIANO, H. L. **Análise de Estruturas – Formulação Matricial e Implementação Computacional**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2005.

TAPAJÓS, L.S.; FERREIRA, J. A. T.; LIMA NETO, A. F.; TEIXEIRA, M. R.; FERREIRA M. P. **Efeito do vento no dimensionamento de edifícios de concreto armado**. Revista IBRACON de Estruturas e Materiais, São Paulo, v. 9, n. 6, p. 883-910, dez. 2016.