



INSTITUTO FEDERAL DE SERGIPE
BACHARELADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
ADEMILTON FONSECA MELO DE SOUZA

CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM MODELO APLICADO A UM TANQUE AQUECEDOR INDUSTRIAL

LAGARTO

2023

ADEMILTON FONSECA MELO DE SOUZA

CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM MODELO APLICADO A UM TANQUE AQUECEDOR INDUSTRIAL

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto Federal de Sergipe como pré-requisito para a obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Me. Rodrigo Ribeiro Santos

LAGARTO

2023

Souza, Ademilton Fonseca Melo de.
S713c Contole preditivo baseado em modelo aplicado a um tanque aquecedor industrial / Ademilton Fonseca Melo de Souza. – Lagarto, 2023.
90 f. ; il.

Monografia (Graduação) – Bacharelado em Engenharia Elétrica. Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de Sergipe – IFS, 2023.
Orientador: Prof. MSc. Rodrigo Ribeiro Santos.

1. Controle preditivo. 2. Engenharia tecnológica. 3. Indústria. 4. Controle de processo industrial. I. Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de Sergipe – IFS. II. Título.

CDU: 62-7



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SERGIPE
Av. Jorge Amado, 1551 – Loteamento Garcia, Bairro Jardins - CEP 49025-330 – Aracaju/SE Fone: (79) 3711 1400 – E-mail: reitoria@ifs.edu.br

APÊNDICE 11 – TERMO DE APROVAÇÃO
(sem coorientador)

CURSO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

TERMO DE APROVAÇÃO

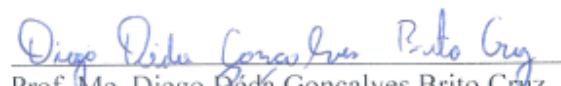
Controle Preditivo Baseado em Modelo Aplicado a um Tanque Aquecedor Industrial

Ademilton Fonseca Melo de Souza

Esta monografia/artigo foi apresentada às 15h30 horas do dia 20 de dezembro de 2023 como requisito parcial para a obtenção do título de **Bacharelado em Engenharia Elétrica**.

O candidato foi arguido pela banca examinadora composta pelos examinadores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho **APROVADO**.


Prof. Dr. Gilderlan Rodrigues Oliveira
CBEEL / IFS – Campus Lagarto


Prof. Me. Diego Dêda Gonçalves Brito Cruz
COEL / IFS – Campus Estância


Prof. Me. Rodrigo Ribeiro Santos
CBEEL / IFS – Campus Lagarto


Prof. Me. Ronaldo da Macena Lima
Coordenador do curso de Engenharia Elétrica
PORTARIA Nº 731, DE 15 DE MARÇO DE 2023

Prof. Msc. Ronaldo da Macena Lima
Coord. Cee/IFS/Campus Lagarto
Portaria Nº 731 de 15/03/2023
SIAPE: 1008357

Lagarto/SE, 20 de dezembro de 2023

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pela força, saúde e motivação para encarar os inúmeros desafios da graduação. Apesar de alguns momentos nos quais me faltou esperança durante a caminhada, Ele sempre esteve comigo.

À minha mãe, Josefa, por todo apoio, incentivo e motivação incondicional e por sempre estar ao meu lado nos momentos difíceis durante esse período da graduação – que não foram poucos e fáceis.

Ao meu orientador, o Professor Rodrigo Ribeiro, por me propiciar realizar esse Trabalho de Conclusão de Curso, com toda a sua paciência.

A todos os professores do Instituto Federal de Sergipe, Campus Lagarto, em especial ao Professor Iraí por todo apoio e suporte durante o período pandêmico a nos brindar com suas discussões filosóficas salutares nas aulas remotas. Tais discussões foram de enorme valia para que, assim como eu, todos os demais presentes naquelas aulas, continuássemos perseverando.

Aos amigos e colegas de curso pela companhia nas aulas e estudos, em especial os amigos Laerton e Paulo que sempre estiveram próximos nessa jornada.

E a todos que de maneira direta ou indireta contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

O controle preditivo ([MPC](#)) surge como alternativa à necessidade da indústria lidar com sistemas multivariáveis e com restrições nos quais as técnicas de controle tradicionais, tais como o [PID](#), não fornecem os benefícios esperados. Um dos primeiros controladores [MPC](#) foi desenvolvido nos anos 1970 pela indústria petroquímica e aplicado aos seus processos, despertando a atenção e o interesse tanto da indústria em geral quanto da academia. Esse desenvolvimento foi responsável por impulsionar diversas aplicações subsequentes. O presente trabalho inicialmente levantou na literatura técnico-científica uma revisão bibliográfica do controle preditivo aplicado a um tanque reator. Aborda-se posteriormente a estratégia de controle preditivo em espaço de estados aplicada no projeto e simulação de um Tanque Aquecedor Agitado Contínuo ([CSTH](#)) através da plataforma de programação e computação numérica MATLAB[®]. Objetiva-se simular a dinâmica do processo e verificar o desempenho do controlador ao manipular as variáveis de entrada sujeitas às restrições. Nos testes de desempenho para mudanças de *setpoint* notou-se a eficiência do [MPC](#) quanto às variáveis controladas seguirem as referências nas saídas e à rejeição de distúrbios. Constatou-se a prioridade do controlador atender as restrições impostas nas entradas do processo ao limitar as variáveis manipuladas nos limites mínimo e máximo de restrição.

Palavras-chave: Controle Preditivo, Espaço de Estados, Restrições, Tanque Aquecedor.

ABSTRACT

Predictive control arises as an alternative to the need for industry to deal with multivariable systems in which traditional control techniques, such as [PID](#), do not bring the expected benefits. One of the first [MPC](#) controllers was developed in the 1970s by the petrochemical industry and applied to its processes, arousing the attention and interest of both industry and academia, being responsible for driving the development of many other applications. The present work initially surveyed in the technical-scientific literature a bibliographical review of predictive control applied to a reactor tank. The state-space predictive control strategy applied in the design and simulation of a Continuous Stirred Tank Heater ([CSTH](#)) through the numerical programming and computing platform is addressed MATLAB[®]. The objective is to simulate the dynamics of the process and verify the performance of the controller when manipulating the input variables subject to the constraints. In the performance tests for setpoint changes, the efficiency of the MPC was noted in terms of the controlled variables following the references in the outputs and the rejection of disturbances. The controller's priority was to meet the constraints imposed on the process inputs by limiting the manipulated variables to the minimum and maximum constraint limits.

Keywords: Predictive Control, State Space, Constraints, Heater Tank.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Estratégia MPC.	24
Figura 2 – Representação esquemática da estrutura básica do MPC.	25
Figura 3 – Representação do Tanque Aquecedor Agitado Contínuo.	58
Figura 4 – Curvas de calibração do processo CSTH. (a) transmissor de nível (LT), (b) relação entre volume e nível, (c) válvula de vazão de água fria (CW), (d) válvula de vazão de água quente (HW), (e) transmissor de vazão de saída (FT), (f) calibração do fluxo de saída, (g) válvula de vapor (steam) e (h) transmissor de temperatura (TT).	60
Figura 5 – Resposta do MPC ao teste de <i>setpoint</i> da variável nível.	66
Figura 6 – Respostas das variáveis manipuladas ao teste de <i>setpoint</i> da variável nível.	67
Figura 7 – Resposta do MPC ao teste de <i>setpoint</i> da variável controlada vazão de água fria.	67
Figura 8 – Respostas das variáveis manipuladas ao teste de <i>setpoint</i> da variável controlada vazão de água fria.	68
Figura 9 – Resposta do MPC ao teste de <i>setpoint</i> da variável temperatura.	69
Figura 10 – Respostas das variáveis manipuladas ao teste de <i>setpoint</i> da variável temperatura.	70
Figura 11 – Resposta do MPC ao teste de <i>setpoint</i> das variáveis controladas em instantes de tempo distintos no horizonte de simulação.	70
Figura 12 – Resposta das variáveis manipuladas do processo à variação de referência das variáveis controladas em instantes de tempo distintos no horizonte de simulação.	71
Figura 13 – Erro de estado estacionário da variável controlada vazão de água fria.	72
Figura 14 – Comportamento das variáveis manipuladas ao teste de <i>setpoint</i> da variável controlada vazão de água fria quanto ao erro de estado estacionário.	72
Figura 15 – Erro de estado estacionário nas variáveis controladas ao variar a refe- rência da variável temperatura.	73
Figura 16 – Comportamento das variáveis manipuladas ao teste de <i>setpoint</i> da variável controlada temperatura quanto ao erro de estado estacionário.	74

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Instrumentação da planta CSTH.	59
Tabela 2 – Pontos de operação do modelo CSTH linearizado.	61
Tabela 3 – Variáveis do processo CSTH.	61
Tabela 4 – Referências para as variáveis controladas do processo CSTH.	62
Tabela 5 – Ponto de operação do CSTH.	64
Tabela 6 – Parâmetros de sintonia do controlador MPC.	65

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CSTH *Continuous Stirred Tank Heater* ou, em português, Tanque Aquecedor Agitado Contínuo

CSTR *Continuous Stirred Tank Reactor* ou, em português, Reator de Tanque com Agitação Contínua

CARIMA *Controller Auto-Regressive Integrated Moving-Average* ou, em português, Controlador Auto-Regressivo Integrado de Média Móvel

DMC *Dynamic Matrix Control* ou, em português, Controle por Matriz Dinâmica

EHAC *Extended Horizon Adaptive Control* ou, em português, Controle Adaptativo de Horizonte Estendido

EPSAC *Extended Prediction Self Adaptive Control* ou, em português, Controle Adaptativo de Predição estendida

GPC *Generalized Predictive Control* ou, em português, Controle Preditivo Generalizado

IMC *Internal Model Control* ou, em português, Controle por Modelo Interno

MAC *Model Algorithm Control* ou, em português, Controle de Modelo Algorítmico

MIMO *Multi-Input, Multi-Output* ou, em português, sistema multivariável

MISO *Multi-Input, Single-Output* ou, em português, Entradas Múltiplas, Saída Única

MOCCA *Multivariable, Optimal, Constrained Control Algorithm* ou, em português, Algoritmo de Controle Multivariável, Ótimo e Restrito

MPC *Model Predictive Control* ou, em português, Controle Preditivo Baseado em Modelo

MPHC *Model Predictive Heuristic Control* ou, em português, Controle de Modelo Preditivo Heurístico

MURHAC *Multipredictor Receding Horizon Adaptive Control* ou, em português, Controle Adaptativo de Horizonte Retrocedente Multipredictor

MUSMAR *Multi-Step Multivariable Adaptive Control* ou, em português, Controle Adaptativo Multivariável de Várias Etapas

MV *Manipulated Variable* ou, em português, variável manipulada

PFC *Predictive Functional Control* ou, em português, Controle Preditivo Funcional

PID *Proportional Integral Derivative* ou, em português, Controle com ação Proporcional, Integral e Derivativa

PNMPC *Practical Non-Linear Model Predictive Controller* ou, em português, Controle Preditivo Prático Não-linear Baseado em Modelo

PV *Process Variable* ou, em português, variável controlada ou variável do processo

QP *Quadratic Programming* ou, em português, Programação Quadrática

RMPC *Robust Model Predictive Control* ou, em português, Controle Preditivo de Modelo Robusto

SISO *Single-Input, Single-Output* ou, em português, sistema monovariável

SP *Setpoint*, ou, em português, valor de referência para a saída.

STH *Stirred Tank Heater* ou, em português, Tanque Aquecedor Agitado

UPC *Unified Predictive Control* ou, em português, Controle Preditivo Unificado

LISTA DE SÍMBOLOS

$\hat{}$	O chapéu indica notação de predição
$*$	Asterisco indica otimização
n	Número de estados (ordem) do sistema
A, B, C	Matrizes de estado, entrada e saída do sistema, respectivamente
k	Instante de tempo discreto
$x(k)$	Variável de estado
$u(k)$	Variável manipulada
$y(k)$	Saída do processo
$\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$	Matrizes de estado, entrada e saída do sistema aumentado, respectivamente
$\xi(k)$	Variável de estado aumentado
N	Horizonte de predição
M	Horizonte de controle
J	Função custo
$\mathbf{r}$	Vetor de referências (<i>setpoint</i>)
ρ	Peso de controle
$\mathbf{Q}$	Matriz de ponderação das saídas
$\mathbf{R}$	Matriz de supressão das ações de controle
p	Número de entradas manipuladas de um sistema MIMO
q	Número de saídas controladas de um sistema MIMO
$\hat{\mathbf{y}}$	Vetor de predições ótimas do processo
$\Delta \hat{\mathbf{u}}$	Vetor com os incrementos futuros de controle
$\mathbf{f}$	Vetor de resposta livre
G	Matriz que multiplica o vetor de incrementos futuros de controle

$\mathcal{H}$	Hessiana
$\Delta \mathbf{u}_{\min}$	Variação mínima da restrição sobre o incremento de controle
$\Delta \mathbf{u}_{\max}$	Variação máxima da restrição sobre o incremento de controle
$\mathbf{u}_{\min}$	Limite mínimo da restrição na ação de controle
$\mathbf{u}_{\max}$	Limite máximo da restrição na ação de controle
$\mathbf{y}_{\min}$	Valor mínimo de restrição sobre a saída
$\mathbf{y}_{\max}$	Valor máximo de restrição sobre a saída
$\mathbf{y}_{\text{ref}}$	Vetor de referências das saídas controladas
$\Delta \mathbf{u}_{\min}$	Variações mínimas das restrições sobre as p entradas incrementais
$\Delta \mathbf{u}_{\max}$	Variações máximas das restrições sobre as p entradas incrementais
$\mathbf{u}_{\min}$	Limites mínimos das restrições sobre as p entradas das ações de controle
$\mathbf{u}_{\max}$	Limites máximos das restrições sobre as p entradas das ações de controle
$\mathbf{y}_{\min}$	Valores mínimos das restrições sobre as q saídas da planta
$\mathbf{y}_{\max}$	Valores máximos das restrições sobre as q saídas da planta
$\mathcal{R}, \gamma$	Matrizes que representam as restrições do problema de programação quadrática do algoritmo MPC
$\mathbf{1}_M$	Matriz coluna unitária de dimensão $M \times 1$
$\mathbf{1}_N$	Matriz coluna unitária de dimensão $N \times 1$
I	Matriz identidade unidimensional
I_p	Matriz identidade de dimensões $p \times p$
$0_{q \times p}$	Matriz nula de dimensões $q \times p$

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	Contextualização	16
1.2	Objetivos	18
1.3	Metodologia	18
1.4	Descrição dos Próximos Capítulos	19
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	20
2.1	Histórico dos Controladores Preditivos	20
2.2	Estado da Arte	21
3	CONTROLE PREDITIVO	24
3.1	Estratégia MPC	24
3.2	Elementos MPC	26
3.2.1	Modelo de predição	26
3.2.2	Função custo	27
3.2.3	Obtenção da lei de controle	28
4	CONTROLE PREDITIVO EM ESPAÇO DE ESTADO	30
4.1	Controle Preditivo Discreto Posicional – caso SISO	30
4.1.1	Cálculo das predições dos estados	30
4.1.2	Cálculo das predições das saídas a partir das predições das entradas	31
4.2	Controle Preditivo Discreto Incremental – caso SISO	32
4.2.1	Cálculo das predições dos estados aumentados	34
4.2.2	Cálculo das predições das saídas aumentadas a partir das predições dos estados aumentados	34
4.3	Função Objetivo – Otimização sem Restrição – caso SISO	36
4.4	Controle Preditivo Discreto Posicional – caso MIMO	38
4.5	Controle Preditivo Discreto Incremental – caso MIMO	39
4.6	Função Objetivo – Otimização sem Restrição: caso MIMO	41
4.7	MPC com Restrições – caso SISO	44
4.7.1	Restrições sobre os incrementos do controle Δu	44
4.7.2	Restrições sobre a ação de controle u	45
4.7.3	Restrições sobre a saída y	47
4.7.4	Reformulação do problema de otimização – caso SISO	48
4.8	MPC com Restrições – caso MIMO	50
4.8.1	Restrições sobre os incrementos do controle Δu	50

4.8.2	Restrições sobre a ação de controle u	51
4.8.3	Restrições sobre a saída y	54
4.8.4	Reformulação do problema de otimização – caso MIMO	56
4.9	Programação Quadrática	57
5	ESTUDO DE CASO	58
5.1	O Tanque Aquecedor Agitado Contínuo	58
5.2	Instrumentação da Planta CSTH	59
5.3	Calibração dos Sensores e Atuadores do Processo CSTH	59
5.4	Linearização do Modelo CSTH	61
5.4.1	Ponto de Operação 2 do Processo CSTH	62
5.4.1.1	Modelo em espaço de estados em malha aberta	62
5.4.1.2	Modelo em função de transferência em malha aberta	63
6	RESULTADOS E DISCUSSÃO	64
6.1	Sintonia do MPC Aplicado ao CSTH	64
6.2	Simulação do MPC Aplicado ao CSTH	66
7	CONCLUSÕES	75
	REFERÊNCIAS	76
	ANEXO A – CÓDIGO PRINCIPAL	79
	ANEXO B – CÓDIGO DE SIMULAÇÃO MPC BASEADO NO MO- DELO DE ESPAÇO DE ESTADOS INCREMENTAL MULTIVARIÁVEL.	86
	ANEXO C – CÓDIGO DE SIMULAÇÃO EMPREGADO NO CÁL- CULO DAS MATRIZES DE ESPAÇO DE ESTADOS INCREMENTAL $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ E $\tilde{C}$.	89
	ANEXO D – CÓDIGO DO ALGORITMO FILTRO DE KALMAN.	90

1 INTRODUÇÃO

1.1 Contextualização

O controle preditivo (*Model Predictive Control* - [MPC](#)) é uma classe de estratégias de controle que tem impactado significativamente o controle de processos industriais devido a sua capacidade de lidar com sistemas multivariáveis sujeito a restrições operacionais ([MACIEJOWSKI, 2002](#)). O objetivo do controle de processo com o [MPC](#) é garantir uma operação ótima da planta, levando em consideração pré-requisitos como otimização da produção, qualidade do produto, economia de insumos e preservação ambiental. De acordo com [Gesser \(2016\)](#), a vantagem de utilizar controle preditivo pode ser um diferencial para o crescimento da empresa industrial, pois facilita a tomada de decisões e ainda se consegue diminuir a variabilidade das variáveis, possibilitando, assim, trabalhar mais próximo dos limites de operação, que em muitos processos significa maximizar a produção e/ou o lucro.

O [MPC](#) foi inicialmente desenvolvido para atender demandas da indústria petroquímica, a qual foi decisiva para o desenvolvimento dessa estratégia de controle. Além da indústria de óleo e gás, controladores [MPC](#) foram empregados em outras áreas, sendo possível encontrar aplicações na indústria de processos (química, biológica e farmacêutica), eletrônica de potência (motores elétricos), na construção civil (sistemas de gerenciamento de energia: aquecimento, ventilação e ar-condicionamento de edifícios, na maioria não residenciais), na geração de energias renováveis (turbinas eólicas, veículos elétricos híbridos), manufatura (processos de fresamento, tecelagem, soldagem), robótica, otimização da qualidade de vídeos no *streaming* dentre outras ([SCHWENZER et al., 2021](#)). Em quase todas as aplicações os controladores [MPC](#) superaram os controladores clássicos, conforme discutido em [Schwenzer et al. \(2021\)](#), mostrando a capacidade e eficiência da estratégia [MPC](#) de obter sistemas confiáveis e operá-los.

A aplicação de estratégias de controle avançadas como o [MPC](#) a nível industrial requer esforços tanto a nível de implementação do controle quanto a nível de formação específica dos operadores ([LIMA, 2013; GESSER, 2016](#)). Isso ocorre devido ao grau de dificuldade conceitual e implementação desse tipo de controlador. Dessa forma, estudos que foquem no desenvolvimento, projeto e/ou aplicação do [MPC](#) são relevantes tanto para literatura técnica quanto para o campo prático da engenharia.

Conforme exposto em [Escobar \(2010\)](#), a estratégia [MPC](#) é uma ferramenta que permite a predição do comportamento futuro do sistema controlado por meio de um modelo matemático da planta. Dessa forma, a grande vantagem dessa estratégia de controle é a ação nos atuadores do sistema antes que ocorra algum prejuízo, seja em termos técnicos,

econômicos ou segurança, bem como na decisão do melhor caminho para atingir um valor de referência ótimo. Segundo [Camacho e Alba \(1995\)](#) vantagens adicionais da estratégia de controle [MPC](#) incluem: aplicação em processos mais simples até os mais complexos; lidar com sistemas multivariável; compensar tempo morto; alimentação direta para compensar perturbações; tratamento de restrições. Como principais desvantagens se destacam a necessidade de obtenção de um modelo confiável da planta e a necessidade de implementar técnicas de otimização para resolver problemas de grandes sistemas.

Embora em termos práticos o controle [PID](#) seja o mais aplicado nos processos industriais ([THAMMINAIDU; SHIHABUDHEEN, 2021](#)), o emprego de estratégias de controle convencionais em processos industriais sujeito a múltiplas restrições pode resultar em um desempenho não desejado. Assim, o [MPC](#) foi proposto para lidar com processos com várias restrições, as quais são muito comum na prática, tais como: a abertura ou fechamento de uma válvula não ultrapassar determinado valor; aceleração de um motor não ser maior que determinado limite; não consumir matéria-prima acima do desejado; manter a variável controlada dentro de uma faixa operacional.

Os algoritmos de controle preditivo desenvolvidos ao longo das últimas décadas se diferenciam pelo tipo de modelo empregado e pela estrutura da função objetivo, sendo classificados em três grupos distintos. No primeiro estão os algoritmos desenvolvidos pela indústria, como o controle de modelo algorítmico (*Model Algorithm Control* - [MAC](#)) ([RICHALET et al., 1978](#)), o qual emprega como modelo de predição a resposta ao impulso com uma função de custo quadrática e o controle por matriz dinâmica (*Dynamic Matrix Control* - [DMC](#)) ([CUTLER; RAMAKER, 1980](#)). Essa abordagem foi desenvolvida por engenheiros da petroquímica SHELL CO. nos anos 70 e utiliza como modelo de predição a resposta ao degrau associado a um problema de otimização com função objetiva quadrática.

Paralelamente aos controladores implementados pela indústria, na academia foram desenvolvidos algoritmos [MPC](#) pertencentes ao segundo grupo baseados no conceito de controle adaptativo. Com características distintas dos controladores desenvolvidos pela indústria, o modelo de predição da planta é representado por uma função de transferência e as perturbações do sistema são representadas por um modelo auto-regressivo integrado e de média móvel (*Controller Auto-Regressive Integrated Moving-Average* - [CARIMA](#)). Dentre eles, destacam-se: o controle preditivo generalizado (*Generalized Predictive Control* - [GPC](#)) ([CLARKE; MOHTADI; TUFFS, 1987a](#); [CLARKE; MOHTADI; TUFFS, 1987b](#)), o controle adaptativo de predição estendida (*Extended Prediction Self Adaptive Control* - [EPSAC](#)) ([KEYSER; CAUWENBERGHE, 1985](#)), o controle adaptativo de horizonte estendido (*Extended Horizon Adaptive Control* - [EHAC](#)) ([YDSTIE, 1984](#)) e o controle preditivo unificado (*Unified Predictive Control* - [UPC](#)) ([SOETERBOEK, 1992](#)). Por fim, o terceiro grupo dos algoritmos [MPC](#), nos quais os modelos representam sistemas não lineares. Deste último grupo destaca-se o controle preditivo prático não-linear baseado em

modelo (*Practical Non-Linear Model Predictive Controller* - [PNMPC](#)) ([PLUCENIO et al., 2007](#)).

A abordagem de modelos de espaço de estados favoreceu o desenvolvimento de abordagens [MPC](#) para sistemas com grande número de entradas e saídas, pois o projeto do controlador é mais objetivo e a análise é mais eficiente ([ZHANG; XUE; GAO, 2018](#)). A principal vantagem da utilização de modelos de espaço de estado como estratégia de controle [MPC](#) é a facilidade de extensão ao caso multivariável, além de haver grande quantidade de resultados teóricos que podem ser aplicados para produzir controladores/observadores e analisar os modelos e leis de controle resultantes ([ROSSITER, 2003](#)).

1.2 Objetivos

O objetivo principal do presente trabalho é projetar e simular, por meio da plataforma de programação e computação numérica MATLAB®, a estratégia de controle avançado [MPC](#) utilizando a estrutura de modelo em espaço de estado e aplicar na planta de um Tanque Aquecedor Agitado Contínuo (*Continuous Stirred Tank Heater* - [CSTH](#)).

Os objetivos específicos são: possibilitar a simulação da dinâmica do processo; propiciar a realização de alterações nas variáveis e restrições de entrada; verificar desempenho do controlador por meio de gráficos; otimizar as malhas temperatura, pressão e a vazão do líquido no tanque.

1.3 Metodologia

Para o desenvolvimento deste trabalho, inicialmente foi realizado um levantamento bibliográfico em acervos técnicos físicos e virtuais a fim de encontrar trabalhos com relevância em livros, artigos e teses com abordagens em [MPC](#) aplicadas ao processo Tanque Aquecedor Agitado Contínuo. Foi estudada a técnica de modelo de espaço de estados aplicada à estratégia de controle avançado [MPC](#). A modelagem da técnica de controle preditivo discreto em espaço de estados abordou os casos mais básicos, isto é, [MPC](#) discreto posicional e incremental [SISO](#) aos casos discreto posicional e incremental multivariável. A modelagem [MPC](#) abordou também o problema de otimização sem e com restrição para sistemas de entrada e saída únicas e multivariável e a programação quadrática cujo método de otimização minimiza a função custo sujeita às restrições do processo.

No estudo de caso do Tanque Aquecedor Agitado Contínuo estudou-se as variáveis manipuladas e controladas do processo, a instrumentação e calibração dos sensores e atuadores da planta [CSTH](#). Foram apresentados os modelos lineares em espaço de estados e função de transferência.

No ambiente de programação e simulação numérica MATLAB[®] foi desenvolvido o algoritmo MPC em espaço de estados incremental multivariável e com restrição nas entradas manipuladas no qual simulou-se o processo CSTH. Nas simulações foi empregado o modelo linear em função de transferência.

1.4 Descrição dos Próximos Capítulos

O presente trabalho é composto por este capítulo introdutório, no qual é apresentada uma breve contextualização sobre controle preditivo, seu histórico e aplicações, com os objetivos e metodologia utilizados, e pelos seguintes capítulos:

No Capítulo 2 é mostrada a revisão bibliográfica dos trabalhos relacionados com o tema encontrado na literatura técnico-científica e um breve histórico do controle preditivo.

No Capítulo 3 é apresentada uma breve introdução conceitual do controle preditivo. Abordou-se os passos da estratégia MPC em tempo discreto com os conceitos de horizonte de predição e controle e, por fim, os elementos em comum entre os algoritmos de controle preditivo.

No Capítulo 4 é apresentada a modelagem do controle predito em modelo de espaço de estados posicional e incremental para sistemas de entrada e saída únicas (SISO) e multivariável (MIMO). O problema de otimização é reformulado para levar em consideração as restrições do processo para sistemas SISO e MIMO. Por último, apresenta-se a programação quadrática.

No Capítulo 5 é apresentado o estudo de caso do Tanque Aquecedor Agitado Contínuo (*Continuous Stirred Tank Heater* - CSTH), a instrumentação e calibração de sensores e atuadores do processo e a representação do modelo linear da planta no espaço de estados e função de transferência.

No Capítulo 6 são apresentados a sintonia do controlador MPC e os resultados obtidos por simulação do algoritmo aplicado à planta CSTH.

No Capítulo 7 é apresentada a conclusão deste trabalho de conclusão de curso e recomendações a trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo é apresentada a revisão bibliográfica de trabalhos disponíveis na literatura técnico-científica sobre a estratégia de controle preditivo baseado em modelo (MPC) aplicada a Reator de Tanque com Agitação Contínua (*Continuous stirred-tank reactor* - CSTR) e a Tanque Aquecedor Agitado (*Stirred Tank Heater* - STH).

2.1 Histórico dos Controladores Preditivos

A estratégia MPC surgiu na década de 70 como resposta à necessidade da indústria de solucionar problemas de otimização com eficiência e segurança de sistemas multivariável (MIMO) e com restrições cujas técnicas de controle tradicional não conseguiam lidar com tais sistemas.

Na literatura técnico-científica atribui-se a Richalet et al. (1978) a primeira referência de controlador preditivo multivariável: o *Model Predictive Heuristic Control* (MPHC). De forma quase simultânea, Cutler e Ramaker (1980) desenvolveram uma nova estratégia de controle chamada de *Dynamic Matrix Control* (DMC). Esta estratégia desenvolvida por engenheiros da petroquímica SHELL CO., cujo desenvolvimento foi impulsionado pela crise do petróleo nos anos 70, passou a ser utilizada pelas indústrias de óleo e gás, superando o clássico controlador PID. Assim, a partir dessas proposições iniciais e das aplicações na indústria petroquímica, desenvolveram-se diversos outros controladores, dentre os quais é possível destacar: *Model Algorithm Control* (MAC), *Internal Model Control* (IMC), *Generalized Predictive Control* (GPC), *Multivariable, Optimal, Constrained Control Algorithm* (MOCCA), *Predictive Functional Control* e, mais recentemente, *Robust Model Predictive Control* (RMPC).

Conforme evidenciado tanto na literatura acadêmica quanto em exemplos práticos na indústria, a evolução da estratégia de controle preditivo ao longo das últimas décadas é notável. De acordo com Qin e Badgwell (2003), em 2003 o controle preditivo contava com mais de 4.600 aplicações industriais de pacotes de software comercial disponíveis. Conforme Schwenzer et al. (2021), a partir dos anos 2000, com a crescente capacidade dos computadores realizarem cálculos mais rapidamente, a pesquisa em controle preditivo se dedica a resolver problemas de controle embarcado em dispositivo físico, tal como o Controlador Lógico Programável.

2.2 Estado da Arte

Kvasnica et al. (2010) realizaram um estudo de caso no qual empregaram o MPC aplicado a um CSTR cuja dinâmica do sistema foi expressa por equação diferencial não linear. O estudo propôs aproximar o sistema do CSTR não linear e com restrições por meio da metodologia de aproximação afim por partes (do inglês *Piecewise Affine*, PWA) baseada em múltiplas linearizações em torno de vários pontos de operação. A escolha dessa abordagem deu-se pela vantagem da estrutura PWA aumentar a precisão do modelo quando comparada com outras abordagens tradicionais baseadas em linearizações simples, as quais fornecem uma aproximação precisa da não linearidade somente quando a planta opera próximo ao ponto de linearização escolhido. Além disso, a estratégia de controle MPC pode ser implementada usando menos custo computacional do que estruturas MPC não linear, o que implica melhor qualidade de controle, uma vez que a precisão da aproximação não cai à medida que a planta se afasta do ponto de linearização. Segundo o estudo de caso, a estratégia de controle MPC apresentou resultados satisfatórios na operação da planta ao respeitar as restrições e no seguimento da referência.

Ridwan, Azad e Bony (2012) implementaram no ambiente de simulação numérica MATLAB[®] três controladores diferentes para controlar a temperatura de um STH a partir da representação matemática não linear equivalente ao sistema físico. Foram implementados, a partir do modelo matemático linearizado, dois controladores SISOs, um PID e outro MPC, ambos tendo como variável de entrada manipulada do sistema a temperatura do revestimento do tanque, e um controlador MPC MISO, tendo como variáveis de entrada do sistema a vazão de entrada e a temperatura de entrada do revestimento. Quanto às perturbações, considerou-se a vazão de entrada do tanque, a temperatura de entrada do tanque, e a vazão de entrada do revestimento. O desempenho das respostas dos controladores foram analisadas tendo como base o tempo de estabilização e o *overshoot* da temperatura do tanque. Nas simulações se observou que a temperatura de entrada do revestimento do tanque para o controlador PID ficou negativa em alguns intervalos de tempo, tornando-se um comportamento indesejado para o controle de um STH. Outro comportamento indesejado do controlador PID foi não atender repostas quanto ao *overshoot* desejado. Ambos os comportamentos indesejados apresentados pelo controlador PID foram eliminados ao controlar o sistema com MPC.

Balaji e Maheswari (2012) realizaram um estudo de caso simulado no qual desenvolveram no ambiente de simulação MATLAB[®]/Simulink[®] dois controladores MPC, sendo um DMC e outro IMC, aplicados ao processo químico total, não linear, exotérmico e com reação de primeira ordem de um CSTR. A simulação objetivou mostrar a diferença entre as estratégias de controle. Por ser uma reação exotérmica, a concentração do produto deve ser controlada com a introdução de uma taxa de fluxo refrigerante. O sistema é descrito por equações diferenciais não lineares de primeira ordem. Nas simulações, foi

possível comparar o comportamento do seguimento do *setpoint* para as estratégias [DMC](#) e [IMC](#). Para processos não lineares como o [CSTR](#) do estudo de caso, o controlador [DMC](#) apresentou resposta estável em torno do ponto de operação, mas ao variar as condições de operação, tornou-se instável. Quanto ao controlador [IMC](#), as variações de *setpoint* geraram respostas rápidas, mas introduziram desvio em estado estacionário (*offset*). De acordo com os autores, a estratégia de controle [IMC](#) proposta pode ser aplicável a uma ampla classe de problemas de controle de processo.

[Li, Zong e Hu \(2013\)](#) propuseram um ([MPC](#)) aplicado ao controle da temperatura do revestimento de um [CSTR](#) a partir de um modelo não linear derivado de um conjunto de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) obtidas do balanço de massa e energia. A linearização do modelo se deu no ponto de estado estacionário e o modelo linear obtido em espaço de estados foi utilizado no controlador [MPC](#) implementado e simulado no ambiente computacional MATLAB®. Na simulação foram considerados dois cenários para o controlador [MPC](#) quanto ao seguimento do ponto de referência. No primeiro cenário, considerou-se duas restrições distintas para a variável de controle e comparou-se os resultados. Para variação menor o sistema controlado tornou-se mais suave, enquanto para duas vezes maior o sistema controlado tornou-se mais rápido. A escolha desse parâmetro deve levar em conta características a serem satisfeitas pela indústria, como rapidez, estabilidade e segurança, por exemplo. No segundo cenário foram considerados dois horizontes de controle distintos. Observou-se que ao aumentar esse parâmetro se pode acelerar o sistema controlado, implicando maior custo computacional.

Embora a estratégia de controle [MPC](#) clássica tenha demonstrado vantagens no controle de processos, pode encontrar dificuldades em sistemas não lineares como o [CSTR](#), pois ao prever o comportamento da planta usando modelos, características do processo variam com o tempo, podendo tornar as previsões imprecisas, o que levaria a deterioração do desempenho de controle. Para contornar esse problema, [Ratnakumari e Triven \(2016\)](#) propuseram um controlador [MPC](#) adaptativo, o qual ajusta o próprio modelo de predição a variações nas condições de operação no tempo de execução para compensar características não lineares da planta. O sistema [CSTR](#) não linear e com restrições foi modelado usando modelo de espaço de estados. O objetivo do controlador é manipular a temperatura de refrigeração do revestimento do tanque a fim de manter a concentração do reagente no nível desejado, apesar das restrições decorrentes da vazão de entrada e da temperatura do tanque. Isto é, o objetivo é manter a temperatura do tanque durante a operação do reator dentro dos limites de operação estabelecidos. O controlador adaptativo atualiza o modelo da planta e as condições para cada intervalo de controle, os quais permanecem constantes durante o horizonte de predição. A partir do estudo de caso comparativo das simulações dos controladores [MPC](#) adaptativo e [MPC](#) clássico aplicados ao controle de temperatura de uma planta [CSTR](#), concluiu-se que o primeiro apresentou melhor resposta para o controle de temperatura e de mudança de concentração, além de ser mais estável. De

acordo com os autores, a estratégia de controle [MPC](#) adaptativo no tocante ao desempenho geral mostrou-se melhor do que o controlador [MPC](#) na maioria dos aspectos de controle a partir do estudo de desempenho de ambos.

[Pipino, Cappelletti e Adam \(2021\)](#) apresentaram uma abordagem de controlador [MPC](#) multi-modelo adaptativo politópico aplicado a um [CSTR](#) não linear e com restrições. A abordagem proposta considerou uma variável de ponderação do modelo do processo como peso virtual, a qual indica para cada instante de amostragem qual a melhor sequência do modelo pode ser usada para descrever o processo controlado naquele instante. Isto é, o método [MPC](#) adapta o modelo do processo do sistema em um único modelo de predição ao ponderar cada vértice do sistema politópico linear e invariante no tempo para encontrar a melhor predição para cada instante de amostragem. O objetivo do controlador proposto é controlar a concentração do reagente e do volume da reação ao manipular a vazão de saída e a vazão de refrigeração do tanque. Considerou-se um sistema [CSTR](#) exotérmico no qual o reagente torna-se o produto por meio de uma reação química irreversível. As simulações realizadas no ambiente computacional MATLAB[®] mostraram a viabilidade da nova proposta do controlador ao garantir a estabilidade do sistema, apesar do maior custo computacional.

[Thamminaidu e Shihabudheen \(2021\)](#) desenvolveram no ambiente de simulação numérica MATLAB[®] um controlador preditivo aplicado ao sistema químico linear [CSTR](#) com modelo matemático do sistema desconhecido. A função de transferência do modelo foi estimada com o método de identificação de sistemas dinâmicos pelo algoritmo de Gauss-Newton a partir de um conjunto de dados temporais, aleatórios e com restrições da entrada e saída da planta. O objetivo do controlador [MPC](#) é controlar a vazão de entrada da concentração do reagente para manter a concentração de saída do produto em uma posição de ajuste desejada. O algoritmo de Gauss-Newton foi utilizado para estimar os coeficientes do modelo da função de transferência, a qual foi representada no modelo de espaço de estados discreto para análise do [MPC](#). Dentre os modelos de função de transferência obtidos ao variar a ordem do sistema, foi utilizado um modelo de segunda ordem ao implementar o controlador. A função custo formulada e os problemas de otimização foram resolvidos usando programação quadrática com e sem restrições. O desempenho transitório do controlador [MPC](#) proposto aplicado ao [CSTR](#) foi comparado com o controlador [PID](#). O [MPC](#) apresentou menor *overshoot* e menor tempo de estabilização, além de menor esforço; esse último indica a eficácia do controlador [MPC](#) proposto ao sistema [CSTR](#). Quanto ao desempenho, uma análise comparativa sob várias condições do controlador [MPC](#) com restrições mostrou que a estratégia de controle proposta a concentração de saída pode seguir a resposta em diferentes pontos, além da entrada não violar os limites de restrições. Foi observado também que, aumentar o horizonte de predição implica redução do *overshoot* na saída em torno do ponto de operação, além de aumentar a precisão quanto à predição.

3 CONTROLE PREDITIVO

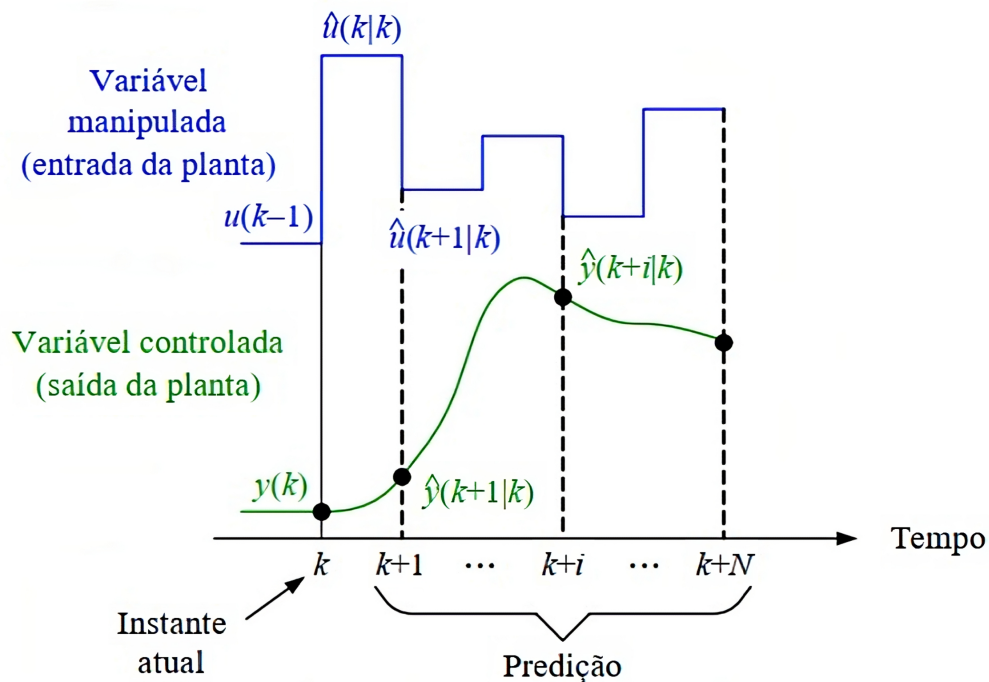
Este capítulo proporcionará uma concisa exploração dos fundamentos do Controle Preditivo (*Model Predictive Control* - [MPC](#)).

O controle avançado de processos se refere a uma estratégia de controle caracterizada por complexidade superior àquela associada a controles regulatórios convencionais, como o Proporcional, Integral e Derivativo ([PID](#)) simples, conforme descrito por ([ESCOBAR, 2010](#)). A técnica de controle preditivo baseia-se na utilização do modelo matemático da planta para prever o comportamento futuro e, posteriormente, controlá-la. Essa abordagem visa assegurar que o sistema siga uma referência específica e seja capaz de rejeitar perturbações. A cada intervalo de amostragem, o algoritmo [MPC](#) tenta otimizar o comportamento futuro da planta calculando uma sequência de ajustes futuros das variáveis manipuladas ([QIN; BADGWELL, 2003](#); [WANG, 2009](#)).

3.1 Estratégia [MPC](#)

A metodologia utilizada nos controladores [MPC](#) está apresentada na Figura 1. [Camacho e Alba \(1995\)](#) descrevem em três passos as características dessa metodologia. No primeiro passo, as saídas futuras para um determinado horizonte de predição, N , são

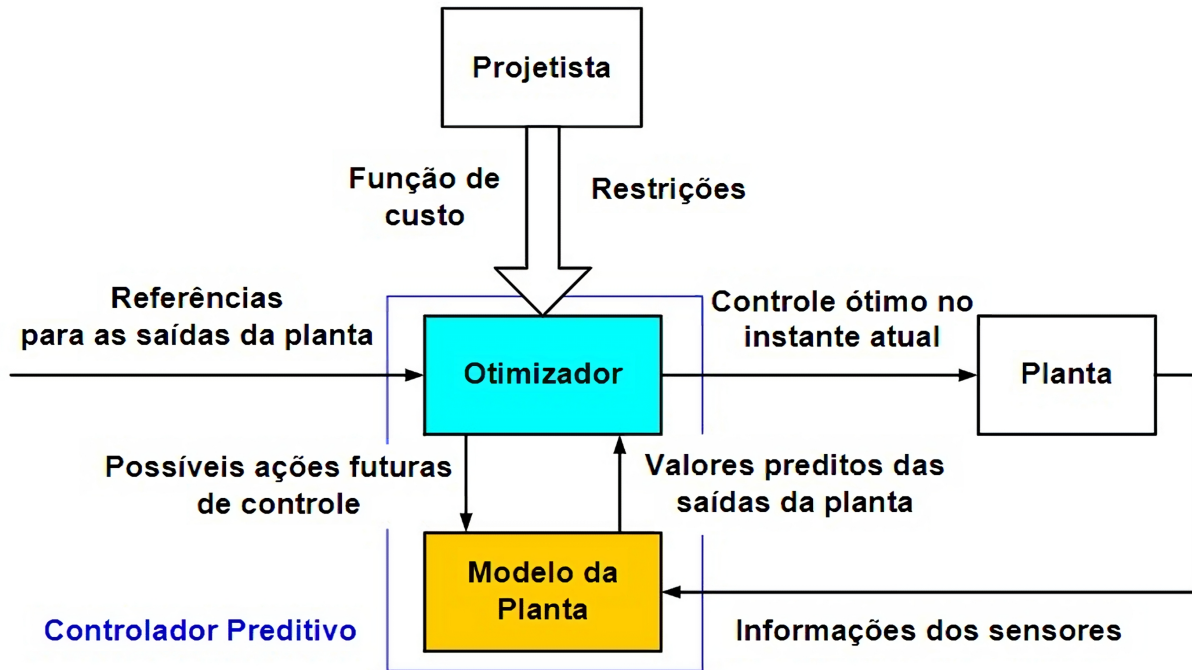
Figura 1 – Estratégia [MPC](#).



Fonte: Adaptado de [Camacho e Alba \(1995\)](#).

preditas para cada instante de tempo discreto, k , utilizando o modelo do processo. As saídas preditas para $\hat{y}(k+i|k)$ ¹, para $i = 1 \dots N$, dependem dos valores conhecidos até o instante k , isto é, das entradas e saídas anteriores e dos sinais de controle futuros $\hat{u}(k+i|k)$, $i = 0 \dots N-1$, os quais são calculados e enviados para o sistema. No segundo passo, é calculada uma sequência de sinais de controle futuros a partir da otimização de um critério determinado, cujo objetivo é manter a trajetória de referência $w(k+i)$ ou y_{ref} o mais perto possível da saída do processo. No último passo, o sinal de controle $\hat{u}(k|k)$ é enviado ao processo, enquanto o restante da sequência dos sinais de controle calculada naquele instante é descartada, pois no instante de amostragem seguinte $y(k+1)$ será conhecido. A partir do conceito de horizonte retrocedente (ou horizonte móvel), no próximo período de amostragem repete-se estes três passos, sendo $y(k+1)$ conhecido para o primeiro passo.

Figura 2 – Representação esquemática da estrutura básica do MPC.



Fonte: Adaptado de Camacho e Alba (1995).

Uma representação genérica da estratégia básica do controlador MPC é apresentada na Figura 2. Tal estrutura é constituída de um modelo matemático da planta a ser controlada e um algoritmo de otimização capaz de determinar uma ação de controle a ser aplicada no processo para cada instante de tempo (ESCOBAR, 2010). Para implementar a estratégia de controle MPC, um modelo matemático do sistema é usado para prever as saídas futuras da planta para cada instante de tempo a partir dos valores das entradas e saídas passadas do processo e também das entradas futuras das ações de controle. O algoritmo de otimização calcula uma sequência de ações de controle futuras ao minimizar

¹ Observe que a notação $\hat{y}(k+i|k)$ indica o valor da variável no instante $k+i$ calculado a partir da informação disponível no instante k .

por meio de uma função custo o erro entre os valores das saídas preditas pelo modelo do sistema e os valores de referência.

3.2 Elementos MPC

Existem diferenças entre os algoritmos MPC desenvolvidos, mas entre eles é possível destacar como elementos comuns (CAMACHO; ALBA, 1995):

- Modelo de predição.
- Função objetivo.
- Obtenção da lei de controle.

3.2.1 Modelo de predição

A principal diferença dos algoritmos MPC para os demais algoritmos de controle é a capacidade daqueles calcular as saídas preditas $\hat{y}(k+i|k)$ do processo em instantes futuros e usar tais predições para controlar a planta. Para as saídas futuras do processo serem calculadas faz-se necessário o algoritmo possuir um modelo da planta.

Os diferentes algoritmos MPC usam modelos para otimizar as saídas preditas e as variáveis manipuladas ou perturbações. Assim, é possível elencar os diferentes tipos de modelos empregados na predição das saídas futuras da planta:

- Resposta ao impulso: empregado no MAC e nos casos especiais GPC e EPSAC.
- Resposta ao degrau: empregado no DMC.
- Função de transferência: usado pelo GPC, UPC, EPSAC, EHAC, MUSMAR ou MURHAC.
- Espaço de estados: usado pelo PFC.
- Outros modelos: não linear (PNMPC), redes neurais, entre outros.

Segundo Rossiter (2003), para prever o comportamento futuro, o processo requer um modelo de como ele próprio se comporta. Esse modelo também deve mostrar a relação da saída atual da variável medida e as entradas atuais/futuras. Além disso, tal modelo não precisa ser linear ou sempre preciso, pois para obter um controle rígido, as decisões são atualizadas constantemente em uma escala de tempo bastante rápida, o que torna possível lidar com alguma incerteza. Na prática, a maioria dos algoritmos MPC usa modelos lineares, pois predições de controle futuras cuja sequência seja linear facilita a otimização e

a análise do comportamento desejado do sistema em malha fechada. Todavia, modelos não lineares podem ser usados, contanto que o esforço computacional não seja um problema e as aproximações lineares não sejam precisas o bastante. A decisão sobre o melhor controle é continuamente atualizada a partir da comparação das informações do comportamento real com o comportamento do modelo predito.

3.2.2 Função custo

Os controladores [MPC](#) geralmente são implementados por computadores, o que torna necessário definir critérios para julgar qual é a melhor ação de controle. Por isso, o projetista define uma função custo, a qual realiza um cálculo numérico preciso a fim de que a trajetória de entrada predita forneça o menor valor numérico ao custo ([ROSSITER, 2003](#)).

Conforme [Camacho e Alba \(1995\)](#), os diversos algoritmos [MPC](#) com suas funções custo distintas propõem-se a obtenção de uma lei de controle, isto é, o objetivo do controlador é que a saída futura (y) no horizonte considerado siga um determinado sinal de referência (w) penalizando simultaneamente o esforço de controle (Δu) necessário para o seguimento da referência. Considere a seguinte função objetivo genérica:

$$J(N_1, N_2, N_u) = E \left\{ \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j) [y(k+j|k) - w(k+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j) [\Delta u(k+j-1)]^2 \right\} \quad (3.1)$$

Dessa função objetivo é possível considerar:

- Parâmetros: N_1 e N_2 representam os horizontes de predição mínimo e máximo, respectivamente, enquanto N_u representa o horizonte de controle, sendo este não necessariamente igual ao horizonte de predição máximo. Geralmente considera-se $N_u \leq N_2$. A ideia por trás de N_1 e N_2 é bem intuitiva: estes parâmetros delimitam os limites dos instantes nos quais deseja-se que a trajetória predita siga a referência. Logo, quando se escolhe um valor alto para N_1 deseja-se que nos primeiros instantes não existam erros, isso resulta numa resposta suave do processo. Em processos com tempo morto d não se faz necessário que N_1 seja menor que $d+1$, isso justifica-se porque a saída $y(k)$ não será influenciada antes do instante $k+d$. Para processos de fase não mínima, o tempo morto permitirá à função custo eliminar nos primeiros instantes respostas negativas. Os coeficientes $\delta(j)$ e $\lambda(j)$ são sequências que ponderam o comportamento futuro do processo, geralmente considerados como valores constantes ou sequências exponenciais. Esses coeficientes penalizam as saídas e as ações de controle, isto é, se o projetista considerar $\delta(j)$ maior do que $\lambda(j)$, o índice de desempenho penalizará a saída implicando menor erro no futuro; caso contrário, o

índice de desempenho penalizará a entrada resultando uma menor variação na ação de controle.

- **Trajectoria de referência:** Uma das principais vantagens do controle preditivo MPC é a capacidade do sistema intervir mediante o conhecimento, *a priori*, da evolução futura da referência antes que a alteração seja efetivamente realizada, assim, evitando efeitos de atraso na resposta do processo. Em muitas aplicações a evolução futura da referência $r(k + j)$ é conhecida anteriormente, como robôs, servos ou processos *batch*; em outras aplicações é possível obter uma melhora explícita no desempenho, mesmo que a referência seja constante, simplesmente sabendo o instante em que o valor dela muda e antecipando-se a essa circunstância. Na minimização do índice de desempenho da Eq. (3.1), geralmente a maioria dos métodos usa a trajetória de referência $w(k + j)$, que não necessariamente deve coincidir com a referência verdadeira.
- **Restrições:** Na prática, todos os processos estão sujeitos a restrições. Os atuadores possuem um campo de ação limitado (limites físicos) e uma determinada taxa de variação (*slew rate*) de seu sinal, como é o caso das válvulas, limitadas pelas posições de totalmente aberta ou fechada e pela variação de sua resposta. Limitações nas variáveis do processo como níveis em tanques, vazões em tubulações ou valor de temperatura podem ser causadas por razões construtivas, de segurança ou ambientais, ou até mesmo o próprio escopo dos sensores; além do mais, as condições de operação são definidas pela intersecção de certas restrições por motivos basicamente econômicos, de maneira que o sistema de controle opere próximo dos limites. Para tudo isso faz-se necessário introduzir restrições no índice de desempenho a ser minimizado. Muitos algoritmos MPC levam em consideração restrições de limites na amplitude e na taxa de variação do sinal de controle e limites na saída. Adicionar restrições na função objetivo torna a minimização mais complexa, uma vez que não é possível obter uma solução linear de forma algébrica a partir da minimização do índice de desempenho com restrições. Logo, a minimização dá-se de forma computacional por algum dos métodos de otimização numérica.

3.2.3 Obtenção da lei de controle

Para obter os valores de $u(k + j|k)$, é necessário minimizar o índice de desempenho J na Eq. (3.1). Para tal, os valores das saídas preditas $\hat{y}(k + j|k)$ são calculados com base nos valores passados das entradas e saídas e dos sinais de controle futuros empregando o modelo escolhido e substituindo no índice de desempenho. Disto, obtêm-se uma expressão cuja minimização conduz aos valores desejados. Uma solução algébrica pode ser obtida se o modelo for linear e sem restrições por meio do critério quadrático, caso contrário um método de otimização iterativo deve ser empregado. Obter a solução não é fácil independentemente

do método, pois haverá muitas variáveis manipuladas independentes, valor da ordem de 10 a 30 variáveis. Para reduzir esses graus de liberdade, propõem-se uma estrutura imposta à lei de controle. Uma alternativa a essa estrutura é a utilização do conceito de horizonte de controle N_u que consiste em considerar após um intervalo determinado $N_u < N_2$ que não haverá variação nos sinais de controle propostos, ou seja:

$$\Delta \hat{u}(k + j - 1) = 0 \quad j > N_u \quad (3.2)$$

isso equivale a penalizar a ação de controle atribuindo valores infinitos a N_u a partir de um determinado instante ([CAMACHO; ALBA, 1995](#)).

4 CONTROLE PREDITIVO EM ESPAÇO DE ESTADO

Neste capítulo será apresentada a fundamentação matemática de controle preditivo (MPC) discreto considerando a estrutura do modelo em espaço de estado posicional e incremental para os casos de um sistema de entrada e saída únicas (SISO) e múltiplas entradas e múltiplas saídas (multivariável) MIMO sem e com restrições, além da programação quadrática (QP).

4.1 Controle Preditivo Discreto Posicional – caso SISO

Considere um sistema linear e invariante no tempo em modelo de espaço de estados com entrada e saída únicas definido em tempo discreto por:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (4.1)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (4.2)$$

com $x(k) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $u(k) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ e $y(k) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$. Note que $x(k)$ representa o vetor de estados de n dimensões, $u(k)$ a variável manipulada ou variável de entrada (sinal de entrada da planta), $y(k)$ a saída do processo e k a variável para cada instante de amostragem em tempo discreto. As matrizes A , B e C são as matrizes dinâmica (de estado), entrada e saída, respectivamente, com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ e $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$. A Eq. (4.1) é chamada equação de estado, enquanto a Eq. (4.2) é chamada equação de saída.

4.1.1 Cálculo das previsões dos estados

Para resolver o problema de controle preditivo é preciso calcular os valores preditos das variáveis controladas a partir da melhor estimativa do estado atual e das entradas futuras. Considere k , $k \geq 0$, o tempo discreto, $x(k)$ o vetor de estado, N o horizonte de predição e M o horizonte de controle, com $M \leq N$. Empregando a notação de valores preditos à Eq. (4.1), tem-se:

$$\hat{x}(k+1|k) = Ax(k) + B\hat{u}(k|k) \quad (4.3)$$

supondo que $x(k)$, o estado atual, seja conhecido.

O cálculo dos estados futuros da planta com base no modelo de espaço de estados dá-se a partir da seguinte propagação:

$$\hat{x}(k+1|k) = Ax(k) + B\hat{u}(k|k)$$

$$\begin{aligned}
\hat{x}(k+2|k) &= A\hat{x}(k+1|k) + B\hat{u}(k+1|k) \\
&= A[Ax(k) + B\hat{u}(k|k)] + B\hat{u}(k+1|k) \\
&= A^2x(k) + AB\hat{u}(k|k) + B\hat{u}(k+1|k) \\
\hat{x}(k+3|k) &= A\hat{x}(k+2|k) + B\hat{u}(k+2|k) \\
&= A[A^2x(k) + AB\hat{u}(k|k) + B\hat{u}(k+1|k)] + B\hat{u}(k+2|k) \\
&= A^3x(k) + A^2B\hat{u}(k|k) + AB\hat{u}(k+1|k) + B\hat{u}(k+2|k) \\
&\vdots \\
\hat{x}(k+N|k) &= A^Nx(k) + A^{N-1}B\hat{u}(k|k) + A^{N-2}B\hat{u}(k+1|k) + \dots \\
&\quad + A^{N-M}B\hat{u}(k+M-1|k)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

onde M representa o horizonte de controle e N o horizonte de predição, com $M \leq N$.

4.1.2 Cálculo das predições das saídas a partir das predições das entradas

Analogamente, a equação de saída $y(k)$ pode ser representada na notação de valores preditos:

$$\hat{y}(k+1|k) = C\hat{x}(k+1|k) \tag{4.5}$$

Substituindo $\hat{x}(k+1|k)$ em $\hat{y}(k+1|k)$, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
\hat{y}(k+1|k) &= C\hat{x}(k+1|k) \\
&= C[Ax(k) + B\hat{u}(k|k)] \\
&= CAx(k) + CB\hat{u}(k|k)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Assim, as saídas preditas da planta da-se-á pela seguinte propagação:

$$\begin{aligned}
\hat{y}(k+1|k) &= C\hat{x}(k+1|k) \\
&= CAx(k) + CB\hat{u}(k|k) \\
\hat{y}(k+2|k) &= C\hat{x}(k+2|k) \\
&= C[A^2x(k) + AB\hat{u}(k|k) + B\hat{u}(k+1|k)] \\
&= CA^2x(k) + CAB\hat{u}(k|k) + CB\hat{u}(k+1|k) \\
\hat{y}(k+3|k) &= C\hat{x}(k+3|k) \\
&= C[A^3x(k) + A^2B\hat{u}(k|k) + AB\hat{u}(k+1|k) + B\hat{u}(k+2|k)] \\
&= CA^3x(k) + CA^2B\hat{u}(k|k) + CAB\hat{u}(k+1|k) + CB\hat{u}(k+2|k) \\
&\vdots \\
\hat{y}(k+N|k) &= C\hat{x}(k+N|k) \\
&= C[A^Nx(k) + A^{N-1}B\hat{u}(k|k) + A^{N-2}B\hat{u}(k+1|k) + \dots
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
& + A^{N-M} B \hat{u}(k+M-1|k)] \\
= & CA^N x(k) + CA^{N-1} B \hat{u}(k|k) + CA^{N-2} B \hat{u}(k+1|k) + \dots \\
& + CA^{N-M} B \hat{u}(k+M-1|k)
\end{aligned}$$

As equações das variáveis de saídas futuras podem ser reescritas na forma matricial por:

$$\begin{aligned}
\overbrace{\begin{bmatrix} \hat{y}(k+1|k) \\ \hat{y}(k+2|k) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+N|k) \end{bmatrix}}^{\hat{\mathbf{y}}(N \times 1)} &= \overbrace{\begin{bmatrix} CB & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ CA^{N-1}B & CA^{N-2}B & \dots & CA^{N-M}B \end{bmatrix}}^{H(N \times M)} \overbrace{\begin{bmatrix} \hat{u}(k|k) \\ \hat{u}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{u}(k+M-1|k) \end{bmatrix}}^{\hat{\mathbf{u}}(M \times 1)} \\
&+ \overbrace{\begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^N \end{bmatrix}}^{\mathbf{f}_u(N \times 1)} x(k)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

com $M \leq N$. Considerando $\mathbf{f}_u = \phi x(k)$ obtêm-se a forma matricial compacta das saídas preditas do processo:

$$\hat{\mathbf{y}} = H \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_u \tag{4.9}$$

sendo

$$H = \begin{bmatrix} CB & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & 0 & \dots & 0 \\ CA^2B & CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ CA^{N-1}B & CA^{N-2}B & CA^{N-3}B & \dots & CA^{N-M}B \end{bmatrix}_{N \times M} \tag{4.10}$$

e

$$\phi = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ CA^4 \\ \vdots \\ CA^N \end{bmatrix}_{N \times n} \tag{4.11}$$

Note que $\hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$, $H \in \mathbb{R}^{N \times M}$, $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{M \times 1}$, $\phi \in \mathbb{R}^{N \times n}$, $x(k) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

4.2 Controle Preditivo Discreto Incremental – caso SISO

Uma das vantagens de modelo em espaço de estados é a possibilidade de empregar o operador diferença Δ como incremento para eliminar o erro de regime estacionário em

cada interação nas ações de controle. Dentre diferentes formas, é possível reformular a equação de predição em termos do operador diferença com respeito a entrada u . Seja:

$$u(k) = u(k-1) + \Delta u(k) \quad (4.12)$$

onde o termo Δu representa o incremento na ação de controle. Substituindo essa equação na Eq. (4.1), tem-se:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B[u(k-1) + \Delta u(k)] \\ &= Ax(k) + Bu(k-1) + B\Delta u(k) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Assim,

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k-1) + B\Delta u(k) \\ u(k) = u(k-1) + \Delta u(k) \end{cases} \quad (4.14)$$

ou na forma matricial:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} x(k+1) \\ u(k) \end{bmatrix}}^{\xi(k+1)} = \overbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ 0_{1 \times n} & I \end{bmatrix}}^{\tilde{A}} \overbrace{\begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-1) \end{bmatrix}}^{\xi(k)} + \overbrace{\begin{bmatrix} B \\ I \end{bmatrix}}^{\tilde{B}} \Delta u(k) \quad (4.15)$$

A saída é dada por:

$$y(k) = C\xi(k) = \overbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}}^{\tilde{C}} \overbrace{\begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-1) \end{bmatrix}}^{\xi(k)} \quad (4.16)$$

Note que $\xi(k) = [x(k) \ u(k-1)]^T$, $\xi(k) \in \mathbb{R}^{(n+1) \times 1}$, é o novo vetor de espaço de estados aumentado, e $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ e $\tilde{C}$ são as novas matrizes de estado, entrada e saída aumentadas, respectivamente. Assim, será empregado esse novo modelo reescrito em termos de Δu :

$$\xi(k+1) = \tilde{A}\xi(k) + \tilde{B}\Delta u(k) \quad (4.17)$$

$$y(k) = \tilde{C}\xi(k) \quad (4.18)$$

com

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0_{1 \times n} & I \end{bmatrix} \quad (4.19a)$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ I \end{bmatrix} \quad (4.19b)$$

$$\tilde{C} = [C \ 0] \quad (4.19c)$$

e $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$, $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times 1}$, $\tilde{C} \in \mathbb{R}^{1 \times (n+1)}$, sendo I a matriz identidade de primeira ordem e $0_{1 \times n}$ a matriz linha de n elementos nulos. Note que $\Delta u(k) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$, $y(k) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$.

4.2.1 Cálculo das previsões dos estados aumentados

Empregando a notação de previsão à equação de estado aumentado, tem-se:

$$\hat{\xi}(k+1|k) = \tilde{A}\xi(k) + \tilde{B}\Delta\hat{u}(k|k) \quad (4.20)$$

Quanto à equação de saída do estado aumentado, segue que:

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+1|k) &= \tilde{C}\hat{\xi}(k+1|k) \\ &= \tilde{C} [\tilde{A}\xi(k) + \tilde{B}\Delta\hat{u}(k|k)] \\ &= \tilde{C}\tilde{A}\xi(k) + \tilde{C}\tilde{B}\Delta\hat{u}(k|k) \end{aligned} \quad (4.21)$$

O cálculo dos estados aumentados futuros da planta dá-se sequencialmente por:

$$\begin{aligned} \hat{\xi}(k+1|k) &= \tilde{A}\xi(k) + \tilde{B}\Delta\hat{u}(k|k) \\ \hat{\xi}(k+2|k) &= \tilde{A}\hat{\xi}(k+1|k) + \tilde{B}\Delta\hat{u}(k+1|k) \\ &= \tilde{A} [\tilde{A}\xi(k) + \tilde{B}\Delta\hat{u}(k|k)] + \tilde{B}\Delta\hat{u}(k+1|k) \\ &= \tilde{A}^2\xi(k) + \tilde{A}\tilde{B}\Delta\hat{u}(k|k) + \tilde{B}\Delta\hat{u}(k+1|k) \\ \hat{\xi}(k+3|k) &= \tilde{A}\hat{\xi}(k+2|k) + \tilde{B}\Delta\hat{u}(k+2|k) \\ &= \tilde{A} [\tilde{A}^2\xi(k) + \tilde{A}\tilde{B}\Delta\hat{u}(k|k) + \tilde{B}\Delta\hat{u}(k+1|k)] + \tilde{B}\Delta\hat{u}(k+2|k) \\ &= \tilde{A}^3\xi(k) + \tilde{A}^2\tilde{B}\Delta\hat{u}(k|k) + \tilde{A}\tilde{B}\Delta\hat{u}(k+1|k) + \tilde{B}\Delta\hat{u}(k+2|k) \\ &\vdots \\ \hat{\xi}(k+N|k) &= \tilde{A}^N\xi(k) + \tilde{A}^{N-1}\tilde{B}\Delta\hat{u}(k|k) + \tilde{A}^{N-2}\tilde{B}\Delta\hat{u}(k+1|k) + \dots \\ &\quad + \tilde{A}^{N-M}\tilde{B}\Delta\hat{u}(k+M-1|k) \end{aligned} \quad (4.22)$$

4.2.2 Cálculo das previsões das saídas aumentadas a partir das previsões dos estados aumentados

Semelhante à sequência de cálculos dos estados futuros, as saídas previstas são calculadas substituindo os estados futuros aumentados na equação de saída aumentada do processo:

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+1|k) &= \tilde{C}\hat{\xi}(k+1|k) \\ &= \tilde{C}\tilde{A}\xi(k) + \tilde{C}\tilde{B}\Delta\hat{u}(k|k) \\ \hat{y}(k+2|k) &= \tilde{C}\hat{\xi}(k+2|k) \\ &= \tilde{C} [\tilde{A}^2\xi(k) + \tilde{A}\tilde{B}\Delta\hat{u}(k|k) + \tilde{B}\Delta\hat{u}(k+1|k)] \\ &= \tilde{C}\tilde{A}^2\xi(k) + \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B}\Delta\hat{u}(k|k) + \tilde{C}\tilde{B}\Delta\hat{u}(k+1|k) \\ \hat{y}(k+3|k) &= \tilde{C}\hat{\xi}(k+3|k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \tilde{C} [\tilde{A}^3 \xi(k) + \tilde{A}^2 \tilde{B} \Delta \hat{u}(k|k) + \tilde{A} \tilde{B} \Delta \hat{u}(k+1|k) + \tilde{B} \Delta \hat{u}(k+2|k)] \\
&= \tilde{C} \tilde{A}^3 \xi(k) + \tilde{C} \tilde{A}^2 \tilde{B} \Delta \hat{u}(k|k) + \tilde{C} \tilde{A} \tilde{B} \Delta \hat{u}(k+1|k) + \tilde{C} \tilde{B} \Delta \hat{u}(k+2|k) \\
&\vdots \\
\hat{y}(k+N|k) &= \tilde{C} \hat{\xi}(k+N|k) \\
&= \tilde{C} [\tilde{A}^N \xi(k) + \tilde{A}^{N-1} \tilde{B} \Delta \hat{u}(k|k) + \tilde{A}^{N-2} \tilde{B} \Delta \hat{u}(k+1|k) + \dots \\
&\quad + \tilde{A}^{N-M} \tilde{B} \Delta \hat{u}(k+M-1|k)] \\
&= \tilde{C} \tilde{A}^N \xi(k) + \tilde{C} \tilde{A}^{N-1} \tilde{B} \Delta \hat{u}(k|k) + \tilde{C} \tilde{A}^{N-2} \tilde{B} \Delta \hat{u}(k+1|k) + \dots \\
&\quad + \tilde{C} \tilde{A}^{N-M} \tilde{B} \Delta \hat{u}(k+M-1|k)
\end{aligned} \tag{4.23}$$

As equações de saídas futuras preditivas aumentadas podem ser reescritas na forma matricial como:

$$\begin{aligned}
\overbrace{\begin{bmatrix} \hat{y}(k+1|k) \\ \hat{y}(k+2|k) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+N|k) \end{bmatrix}}^{\mathbf{\hat{y}}(N \times 1)} &= \overbrace{\begin{bmatrix} \tilde{C} \tilde{B} & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{C} \tilde{A} \tilde{B} & \tilde{C} \tilde{B} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{C} \tilde{A}^{N-1} \tilde{B} & \tilde{C} \tilde{A}^{N-2} \tilde{B} & \dots & \tilde{C} \tilde{A}^{N-M} \tilde{B} \end{bmatrix}}^{G(N \times M)} \overbrace{\begin{bmatrix} \Delta \hat{u}(k|k) \\ \Delta \hat{u}(k+1|k) \\ \vdots \\ \Delta \hat{u}(k+M-1|k) \end{bmatrix}}^{\Delta \hat{\mathbf{u}}(M \times 1)} \\
&\quad + \overbrace{\begin{bmatrix} \tilde{C} \tilde{A} \\ \tilde{C} \tilde{A}^2 \\ \vdots \\ \tilde{C} \tilde{A}^N \end{bmatrix}}^{\mathbf{f}(N \times 1)} \xi(k)
\end{aligned} \tag{4.24}$$

e na forma matricial compacta considerando $\mathbf{f} = \Phi \xi(k)$:

$$\mathbf{\hat{y}} = G \Delta \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{f}, \tag{4.25}$$

com $\mathbf{\hat{y}} \in \mathbb{R}^N$, $G \in \mathbb{R}^{N \times M}$, $\Delta \hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^M$, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$. Note que $\mathbf{\hat{y}}$ representa o novo vetor de espaço de estados aumentado das predições da saída do processo, sendo $\mathbf{f}$ o vetor de resposta livre, $\Delta \hat{\mathbf{u}}$ o vetor de incrementos futuros das ações de controle a serem calculadas e G uma matriz que representa o modelo da planta, sendo

$$G = \begin{bmatrix} \tilde{C} \tilde{B} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{C} \tilde{A} \tilde{B} & \tilde{C} \tilde{B} & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{C} \tilde{A}^2 \tilde{B} & \tilde{C} \tilde{A} \tilde{B} & \tilde{C} \tilde{B} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{C} \tilde{A}^{N-1} \tilde{B} & \tilde{C} \tilde{A}^{N-2} \tilde{B} & \tilde{C} \tilde{A}^{N-3} \tilde{B} & \dots & \tilde{C} \tilde{A}^{N-M} \tilde{B} \end{bmatrix}_{N \times M} \tag{4.26}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \tilde{C}\tilde{A} \\ \tilde{C}\tilde{A}^2 \\ \tilde{C}\tilde{A}^3 \\ \tilde{C}\tilde{A}^4 \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^N \end{bmatrix}_{N \times (n+1)} \quad (4.27)$$

Note que o vetor

$$\hat{\mathbf{y}} = [\hat{y}(k+1|k) \quad \hat{y}(k+2|k) \quad \hat{y}(k+3|k) \quad \dots \quad \hat{y}(k+N|k)]^T \quad (4.28)$$

contém as variáveis de saída preditas, enquanto o vetor

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} = [\Delta \hat{u}(k|k) \quad \Delta \hat{u}(k+1|k) \quad \Delta \hat{u}(k+2|k) \quad \dots \quad \Delta \hat{u}(k+M-1|k)]^T \quad (4.29)$$

representa a trajetória de controle futura. Para o caso **SISO**, a dimensão de $\hat{\mathbf{y}}$ corresponde ao comprimento do horizonte de predição, N , enquanto $\Delta \hat{\mathbf{u}}$ a dimensão corresponde ao horizonte de controle, M .

A Eq. (4.25) pode ser empregada para sistemas de entrada e saída únicas e sistemas multivariável com p entradas e q saídas. Quanto às respostas livre e forçada, a primeira refere-se a representação da dinâmica para o caso de não haver mudanças nas ações de controle, enquanto a segunda refere-se à dinâmica para o caso de haver variações de controle (LIMA, 2013).

Note que G é uma matriz triangular cujo os elementos inferiores são distintos de zero. É possível observar que todas as variáveis futuras são formuladas com base na informação do estado $x(i)$ atual e nos movimentos futuros de $\Delta u(k+i)$, com $i = 0, 1, \dots, M-1$.

4.3 Função Objetivo – Otimização sem Restrição – caso **SISO**

Dentre as funções custo encontradas nos algoritmos **MPC** para a obtenção da lei de controle, as mais comum assumem a forma quadrática como:

$$J(\hat{\mathbf{y}}, \Delta \hat{\mathbf{u}}) = (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{r})^T (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{r}) + \rho \Delta \hat{\mathbf{u}}^T \Delta \hat{\mathbf{u}} \quad (4.30)$$

onde $\mathbf{r}$ é o vetor de referências futuras e ρ o peso do controle, $\rho > 0$. O objetivo principal da função custo (J) é estabelecer uma relação entre as saídas futuras ($\hat{\mathbf{y}}$) e o sinal de referência ($\mathbf{r}$) num horizonte determinado, para que $\hat{\mathbf{y}}$ siga $\mathbf{r}$ mesmo que o esforço de controle ($\Delta \hat{\mathbf{u}}$) seja penalizado. O vetor que contém os valores de referência assume a forma:

$$\mathbf{r}^T = \overbrace{[1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]}^N \mathbf{y}_{\text{ref}} \quad (4.31)$$

Substituindo a Eq. (4.25) na Eq. (4.30), tem-se:

$$\begin{aligned}
 J(\hat{\mathbf{y}}, \Delta \hat{\mathbf{u}}) &= (G\Delta \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{f} - \mathbf{r})^T (G\Delta \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{f} - \mathbf{r}) + \rho \Delta \hat{\mathbf{u}}^T \Delta \hat{\mathbf{u}} \\
 &= \left[(G\Delta \hat{\mathbf{u}})^T + (\mathbf{f} - \mathbf{r})^T \right] [G\Delta \hat{\mathbf{u}} + (\mathbf{f} - \mathbf{r})] + \rho \Delta \hat{\mathbf{u}}^T \Delta \hat{\mathbf{u}} \\
 &= (G\Delta \hat{\mathbf{u}})^T (G\Delta \hat{\mathbf{u}}) + (G\Delta \hat{\mathbf{u}})^T (\mathbf{f} - \mathbf{r}) + (\mathbf{f} - \mathbf{r})^T (G\Delta \hat{\mathbf{u}}) \\
 &\quad + (\mathbf{f} - \mathbf{r})^T (\mathbf{f} - \mathbf{r}) + \rho \Delta \hat{\mathbf{u}}^T \Delta \hat{\mathbf{u}}
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Note que, se uma matriz genérica D é dita simétrica, então $D^T = D$, sendo D uma matriz quadrada. Assim,

$$\left[(G\Delta \hat{\mathbf{u}})^T (\mathbf{f} - \mathbf{r}) \right]^T = (\mathbf{f} - \mathbf{r})^T \left[(G\Delta \hat{\mathbf{u}})^T \right]^T = (\mathbf{f} - \mathbf{r})^T (G\Delta \hat{\mathbf{u}})$$

Logo,

$$(G\Delta \hat{\mathbf{u}})^T (\mathbf{f} - \mathbf{r}) = (\mathbf{f} - \mathbf{r})^T (G\Delta \hat{\mathbf{u}})$$

e

$$(G\Delta \hat{\mathbf{u}})^T (\mathbf{f} - \mathbf{r}) + (\mathbf{f} - \mathbf{r})^T (G\Delta \hat{\mathbf{u}}) = 2(\mathbf{f} - \mathbf{r})^T (G\Delta \hat{\mathbf{u}}) \tag{4.33}$$

Segue que,

$$\begin{aligned}
 J(\hat{\mathbf{y}}, \Delta \hat{\mathbf{u}}) &= \Delta \hat{\mathbf{u}}^T G^T G \Delta \hat{\mathbf{u}} + 2(\mathbf{f} - \mathbf{r})^T G \Delta \hat{\mathbf{u}} + (\mathbf{f} - \mathbf{r})^T (\mathbf{f} - \mathbf{r}) + \rho \Delta \hat{\mathbf{u}}^T \Delta \hat{\mathbf{u}} \\
 &= \Delta \hat{\mathbf{u}}^T \underbrace{(G^T G + \rho I_M)}_{(1/2)\mathcal{H}} \Delta \hat{\mathbf{u}} + \underbrace{2(\mathbf{f} - \mathbf{r})^T G}_{c^T} \Delta \hat{\mathbf{u}} + \underbrace{(\mathbf{f} - \mathbf{r})^T (\mathbf{f} - \mathbf{r})}_{f_0}
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Portanto, a função custo pode ser reescrita como:

$$J(\Delta \hat{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \Delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathcal{H} \Delta \hat{\mathbf{u}} + c^T \Delta \hat{\mathbf{u}} + f_0 \tag{4.35}$$

com

$$\mathcal{H} = 2(G^T G + \rho I_M) \tag{4.36}$$

$$c^T = 2(\mathbf{f} - \mathbf{r})^T G \tag{4.37}$$

$$f_0 = (\mathbf{f} - \mathbf{r})^T (\mathbf{f} - \mathbf{r}) \tag{4.38}$$

sendo $\mathcal{H} = 2(G^T G + \rho I_M)$ a matriz Hessiana. Note que $\mathcal{H}$ representa o termo quadrático, c^T o termo linear e f_0 o termo independente. I_M é a matriz identidade de dimensões $M \times M$.

O objetivo do algoritmo MPC é calcular as ações de controle futuras ao minimizar o erro entre a trajetória predita e a referência, isto é, determinar as ações de controle que minimizem o índice de desempenho J , que se dá quando $\frac{\partial J(\Delta \hat{\mathbf{u}})}{\partial \Delta \hat{\mathbf{u}}} = 0$ para o caso no qual não haja restrições no sinal de controle. Logo,

$$\min J \Rightarrow \frac{\partial J(\Delta \hat{\mathbf{u}})}{\partial \Delta \hat{\mathbf{u}}} = 0 \tag{4.39}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J(\Delta \hat{\mathbf{u}})}{\partial \Delta \hat{\mathbf{u}}} &= \frac{\partial}{\partial \Delta \hat{\mathbf{u}}} \left[\Delta \hat{\mathbf{u}}^T (G^T G + \rho I_M) \Delta \hat{\mathbf{u}} + 2(\mathbf{f} - \mathbf{r})^T G \Delta \hat{\mathbf{u}} + (\mathbf{f} - \mathbf{r})^T (\mathbf{f} - \mathbf{r}) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \Delta \hat{\mathbf{u}}} \left[\Delta \hat{\mathbf{u}}^T (G^T G + \rho I_M) \Delta \hat{\mathbf{u}} \right] + \frac{\partial}{\partial \Delta \hat{\mathbf{u}}} \left[2(\mathbf{f} - \mathbf{r})^T G \Delta \hat{\mathbf{u}} \right] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial \Delta \hat{\mathbf{u}}} \left[(\mathbf{f} - \mathbf{r})^T (\mathbf{f} - \mathbf{r}) \right] \\
&= 2(G^T G + \rho I_M) \Delta \hat{\mathbf{u}} + 2(\mathbf{f} - \mathbf{r})^T G
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Então,

$$\begin{aligned}
2(G^T G + \rho I_M) \Delta \hat{\mathbf{u}} + 2(\mathbf{f} - \mathbf{r})^T G &= 0 \\
(G^T G + \rho I_M) \Delta \hat{\mathbf{u}} &= -(\mathbf{f} - \mathbf{r})^T G
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Considerando a matriz Hessiana como positiva definida, $\mathcal{H} > 0$, é possível multiplicar ambos os lados por $(G^T G + \rho I_M)^{-1}$. Logo,

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}^* = -(G^T G + \rho I_M)^{-1} (\mathbf{f} - \mathbf{r})^T G \tag{4.42}$$

Note que $c = 2G^T (\mathbf{f} - \mathbf{r})$. Então, obtêm-se a seguinte lei de controle:

$$\begin{aligned}
\Delta \hat{\mathbf{u}}^* &= -\frac{1}{2} (G^T G + \rho I_M)^{-1} [2G^T (\mathbf{f} - \mathbf{r})] \\
&= -\mathcal{H}^{-1} c
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Portanto,

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}^* = (G^T G + \rho I_M)^{-1} G^T (\mathbf{r} - \mathbf{f}) \tag{4.44}$$

Essa lei de controle é aplicada a soluções de problemas para os casos sem restrição. Devido ao princípio do horizonte retrocedente, no instante atual k , será aplicada apenas o primeiro elemento correspondente a variação de controle do vetor $\Delta \hat{\mathbf{u}}^*$. A matriz $(G^T G + \rho I_M)^{-1}$ é quadrada de dimensões $M \times M$.

4.4 Controle Preditivo Discreto Posicional – caso MIMO

Suponha um sistema linear e invariante no tempo em modelo de espaço de estados multivariável posicional, com p entradas (variáveis manipuladas) e q saídas (variáveis controladas), com $q < p$ (sistema subatuado), definido em tempo discreto por:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \tag{4.45}$$

$$y(k) = Cx(k) \tag{4.46}$$

com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ e $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$; $x(k) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $u(k) \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ e $y(k) \in \mathbb{R}^{q \times 1}$, onde p representa o número de entradas e q o número de saídas do sistema MIMO.

As equações de predição dos estados $\hat{\mathbf{x}}$ e das saídas $\hat{\mathbf{y}}$ com respeito a ação de controle $\hat{\mathbf{u}}$ são obtidas de forma análoga ao caso MPC discreto posicional SISO, onde o horizonte de predição equivale a $q \cdot N$ e o horizonte de controle a $p \cdot M$. Assim,

$$\hat{\mathbf{y}} = H\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_u, \quad (4.47)$$

com

$$H = \begin{bmatrix} CB & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & 0 & \dots & 0 \\ CA^2B & CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ CA^{N-1}B & CA^{N-2}B & CA^{N-3}B & \dots & CA^{N-M}B \end{bmatrix}_{q \cdot N \times p \cdot M} \quad (4.48)$$

e

$$\phi = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ CA^4 \\ \vdots \\ CA^N \end{bmatrix}_{q \cdot N \times n} \quad (4.49)$$

sendo $\mathbf{f}_u = \phi x(k)$.

Os vetores $\hat{\mathbf{y}}$ e $\hat{\mathbf{u}}$ têm dimensões $q \cdot N \times 1$ e $p \cdot M \times 1$, respectivamente, enquanto $\mathbf{f}_u$ tem dimensão $q \cdot N \times 1$. Note que $\hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^{q \cdot N}$, $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{p \cdot M}$, $\mathbf{f}_u \in \mathbb{R}^{q \cdot N}$, donde $\phi \in \mathbb{R}^{q \cdot N \times n}$.

4.5 Controle Preditivo Discreto Incremental – caso MIMO

Analogamente ao caso MPC discreto incremental SISO, será empregado um modelo em espaço de estados para o caso do controle preditivo discreto incremental multivariável. Define-se um vetor de espaço de estados aumentado da forma:

$$\xi(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-1) \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

com $\xi(k) \in \mathbb{R}^{n+p}$. Observe que

$$\xi(k+1) = \begin{bmatrix} x(k+1) \\ u(k) \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

Substituindo $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ e $u(k) = u(k-1) + \Delta u(k)$ em $\xi(k+1)$ e rearranjando os termos chega-se a equação de estado aumentada reescrita em termos do incremento Δu

como:

$$\begin{aligned}
 \xi(k+1) &= \begin{bmatrix} Ax(k) + Bu(k) \\ u(k-1) + \Delta u(k) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} Ax(k) + B[u(k-1) + \Delta u(k)] \\ u(k-1) + \Delta u(k) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} Ax(k) + Bu(k-1) + B\Delta u(k) \\ u(k-1) + \Delta u(k) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} A & B \\ 0_{p \times n} & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ I_p \end{bmatrix} \Delta u(k)
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

Ou, equivalentemente:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} x(k+1) \\ u(k) \end{bmatrix}}^{\xi(k+1)} = \overbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ 0_{p \times n} & I_p \end{bmatrix}}^{\tilde{A}} \overbrace{\begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-1) \end{bmatrix}}^{\xi(k)} + \overbrace{\begin{bmatrix} B \\ I_p \end{bmatrix}}^{\tilde{B}} \Delta u(k) \tag{4.53}$$

A saída é dada por:

$$y(k) = \tilde{C}\xi(k) = \overbrace{\begin{bmatrix} C & 0_{q \times p} \end{bmatrix}}^{\tilde{C}} \overbrace{\begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-1) \end{bmatrix}}^{\xi(k)} \tag{4.54}$$

O novo modelo aumentado em espaço de estados a ser empregado assume a forma:

$$\xi(k+1) = \tilde{A}\xi(k) + \tilde{B}\Delta u(k) \tag{4.55}$$

$$y(k) = \tilde{C}\xi(k) \tag{4.56}$$

com

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0_{p \times n} & I_p \end{bmatrix} \tag{4.57a}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ I_p \end{bmatrix} \tag{4.57b}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C & 0_{q \times p} \end{bmatrix} \tag{4.57c}$$

onde $0_{p \times n}$ e $0_{q \times p}$ são matrizes de zeros de dimensões $p \times n$ e $q \times p$, respectivamente, e I_p é uma matriz identidade de dimensões $p \times p$. Note que $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+p)}$, $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times p}$ e $\tilde{C} \in \mathbb{R}^{q \times (n+p)}$; $\xi(k) \in \mathbb{R}^{(n+p) \times 1}$, $\Delta u(k) \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ e $y(k) \in \mathbb{R}^{q \times 1}$.

As equações de predição dos estados e das saídas são obtidas de forma análoga ao caso do controle preditivo incremental [SISO](#), onde a equação de predição da saída controlada em termo da variação na ação de controle $\Delta \hat{\mathbf{u}}$ é dada por:

$$\hat{\mathbf{y}} = G\Delta \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{f}, \tag{4.58}$$

sendo

$$G = \begin{bmatrix} \tilde{C}\tilde{B} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{B} & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{C}\tilde{A}^2\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{B} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \tilde{C}\tilde{A}^{N-1}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}^{N-2}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}^{N-3}\tilde{B} & \dots & \tilde{C}\tilde{A}^{N-M}\tilde{B} \end{bmatrix}_{q \cdot N \times p \cdot M} \quad (4.59)$$

e

$$\Phi = \begin{bmatrix} \tilde{C}\tilde{A} \\ \tilde{C}\tilde{A}^2 \\ \tilde{C}\tilde{A}^3 \\ \tilde{C}\tilde{A}^4 \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^N \end{bmatrix}_{q \cdot N \times n} \quad (4.60)$$

com $\mathbf{f} = \Phi\xi(k)$.

Os vetores $\hat{\mathbf{y}}$ e $\Delta\hat{\mathbf{u}}$ têm as dimensões $q \cdot N \times 1$ e $p \cdot M \times 1$, respectivamente, com $\hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^{q \cdot N}$ e $\Delta\hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{p \cdot M}$, sendo q o número de entradas e p o número de saídas, e o vetor $\mathbf{f}$ tem dimensão $q \cdot N \times 1$, com $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{q \cdot N}$.

4.6 Função Objetivo – Otimização sem Restrição: caso MIMO

No problema de otimização sem restrição para o caso MIMO será empregada uma função custo quadrática comumente encontrada nos algoritmos MPC na forma:

$$J(\hat{\mathbf{y}}, \Delta\hat{\mathbf{u}}) = (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{r})^T \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{r}) + \Delta\hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{R} \Delta\hat{\mathbf{u}} \quad (4.61)$$

Neste caso

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} y_{\text{ref}} \\ y_{\text{ref}} \\ y_{\text{ref}} \\ \vdots \\ y_{\text{ref}} \end{bmatrix}_{q \cdot N \times 1} \quad (4.62)$$

representa o vetor de referências futuras, donde

$$y_{\text{ref}} = \begin{bmatrix} y_{\text{ref},1} \\ y_{\text{ref},2} \\ y_{\text{ref},3} \\ \vdots \\ y_{\text{ref},q} \end{bmatrix}_{q \times 1} \quad (4.63)$$

sendo y_{ref} o vetor que contém os valores de referência para cada saída controlada.

Seja

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q \end{bmatrix}_{q \cdot N \times q \cdot N} \quad (4.64)$$

e

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R \end{bmatrix}_{p \cdot M \times p \cdot M} \quad (4.65)$$

as matrizes de ponderação das saídas controladas e de supressão das entradas manipuladas, respectivamente. Observe que $Q \in \mathbb{R}^{q \times q}$ e $R \in \mathbb{R}^{p \times p}$ são matrizes de peso quadradas simétricas, sendo Q a matriz de ponderação das saídas e R a matriz de supressão das entradas. Isto é, esta indica as entradas manipuladas que podem ter uma menor variação enquanto aquela indica quais saídas controladas podem ser mais importantes. Se $Q > 0$, $R > 0$ então $\mathbf{Q} > 0$, $\mathbf{R} > 0$. Logo, as matrizes $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ são simétricas e positivas definidas, isto é, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T$. Observe ainda que

$$Q = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_q) \quad (4.66)$$

e

$$R = \text{diag}(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_p) \quad (4.67)$$

são matrizes diagonais de dimensões $q \times q$ e $p \times p$, respectivamente, sendo $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_q$ os pesos para as q saídas controladas e $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_p$ os pesos para as p entradas manipuladas.

Assim, substituindo a Eq.(4.58) na Eq. (4.61), tem-se:

$$\begin{aligned} J(\hat{\mathbf{y}}, \Delta \hat{\mathbf{u}}) &= (G\Delta \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{f} - \mathbf{r})^T \mathbf{Q} (G\Delta \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{f} - \mathbf{r}) + \Delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{R} \Delta \hat{\mathbf{u}} \\ &= \left[(G\Delta \hat{\mathbf{u}})^T + (\mathbf{f} - \mathbf{r})^T \right] \mathbf{Q} [G\Delta \hat{\mathbf{u}} + (\mathbf{f} - \mathbf{r})] + \Delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{R} \Delta \hat{\mathbf{u}} \\ &= (G\Delta \hat{\mathbf{u}})^T \mathbf{Q} (G\Delta \hat{\mathbf{u}}) + \overbrace{(G\Delta \hat{\mathbf{u}})^T \mathbf{Q} (\mathbf{f} - \mathbf{r}) + (\mathbf{f} - \mathbf{r})^T \mathbf{Q} (G\Delta \hat{\mathbf{u}})}^{2(\mathbf{f} - \mathbf{r})^T \mathbf{Q} (G\Delta \hat{\mathbf{u}})} \\ &\quad + (\mathbf{f} - \mathbf{r})^T \mathbf{Q} (\mathbf{f} - \mathbf{r}) + \Delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{R} \Delta \hat{\mathbf{u}} \\ &= \Delta \hat{\mathbf{u}}^T G^T \mathbf{Q} G \Delta \hat{\mathbf{u}} + 2(\mathbf{f} - \mathbf{r})^T \mathbf{Q} G \Delta \hat{\mathbf{u}} + (\mathbf{f} - \mathbf{r})^T \mathbf{Q} (\mathbf{f} - \mathbf{r}) + \Delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{R} \Delta \hat{\mathbf{u}} \\ &= \Delta \hat{\mathbf{u}}^T \underbrace{(G^T \mathbf{Q} G + \mathbf{R})}_{(1/2)\mathcal{H}} \Delta \hat{\mathbf{u}} + \underbrace{2(\mathbf{f} - \mathbf{r})^T \mathbf{Q} G}_{c^T} \Delta \hat{\mathbf{u}} + \underbrace{(\mathbf{f} - \mathbf{r})^T \mathbf{Q} (\mathbf{f} - \mathbf{r})}_{f_0} \end{aligned} \quad (4.68)$$

Portanto,

$$J(\Delta \hat{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \Delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathcal{H} \Delta \hat{\mathbf{u}} + c^T \Delta \hat{\mathbf{u}} + f_0 \quad (4.69)$$

com

$$\mathcal{H} = 2(G^T \mathbf{Q}G + \mathbf{R}) \quad (4.70)$$

$$c^T = 2(\mathbf{f} - \mathbf{r})^T \mathbf{Q}G \quad (4.71)$$

$$f_0 = (\mathbf{f} - \mathbf{r})^T \mathbf{Q}(\mathbf{f} - \mathbf{r}) \quad (4.72)$$

Note que $c = 2G^T \mathbf{Q}(\mathbf{f} - \mathbf{r})$ e $\mathcal{H} = 2(G^T \mathbf{Q}G + \mathbf{R})$ é a matriz Hessiana, com $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^{p \cdot M \times p \cdot M}$, $c^T \in \mathbb{R}^{1 \times p \cdot M}$ e $f_0 \in \mathbb{R}$. Analogamente ao caso [SISO](#), $\mathcal{H}$ representa o termo quadrático, c^T o termo linear e f_0 o termo independente. $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ são matrizes diagonais simétricas positivas definidas de ponderação e supressão, respectivamente.

Como visto no caso do controle preditivo discreto incremental [SISO](#), o objetivo do algoritmo [MPC](#) é resolver um problema de otimização quadrática sujeito a:

$$\min J \Rightarrow \frac{\partial J(\Delta \hat{\mathbf{u}})}{\partial \Delta \hat{\mathbf{u}}} = 0 \quad (4.73)$$

Derivando parcialmente a Eq. (4.61) com respeito a $\Delta \hat{\mathbf{u}}$, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(\Delta \hat{\mathbf{u}})}{\partial \Delta \hat{\mathbf{u}}} &= \frac{\partial}{\partial \Delta \hat{\mathbf{u}}} \left[\Delta \hat{\mathbf{u}}^T (G^T \mathbf{Q}G + \mathbf{R}) \Delta \hat{\mathbf{u}} + 2(\mathbf{f} - \mathbf{r})^T \mathbf{Q}G \Delta \hat{\mathbf{u}} + (\mathbf{f} - \mathbf{r})^T \mathbf{Q}(\mathbf{f} - \mathbf{r}) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \Delta \hat{\mathbf{u}}} \left[\Delta \hat{\mathbf{u}}^T (G^T \mathbf{Q}G + \mathbf{R}) \Delta \hat{\mathbf{u}} \right] + \frac{\partial}{\partial \Delta \hat{\mathbf{u}}} \left[2(\mathbf{f} - \mathbf{r})^T \mathbf{Q}G \Delta \hat{\mathbf{u}} \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \Delta \hat{\mathbf{u}}} \left[(\mathbf{f} - \mathbf{r})^T \mathbf{Q}(\mathbf{f} - \mathbf{r}) \right] \\ &= 2(G^T \mathbf{Q}G + \mathbf{R}) \Delta \hat{\mathbf{u}} + 2(\mathbf{f} - \mathbf{r})^T \mathbf{Q}G \end{aligned} \quad (4.74)$$

Fazendo $\frac{\partial J(\Delta \hat{\mathbf{u}})}{\partial \Delta \hat{\mathbf{u}}} = 0$, segue que:

$$2(G^T \mathbf{Q}G + \mathbf{R}) \Delta \hat{\mathbf{u}} + 2(\mathbf{f} - \mathbf{r})^T \mathbf{Q}G = 0 \quad (4.75)$$

ou

$$(G^T \mathbf{Q}G + \mathbf{R}) \Delta \hat{\mathbf{u}} = -(\mathbf{f} - \mathbf{r})^T \mathbf{Q}G \quad (4.76)$$

ou, ainda,

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}^* = (G^T \mathbf{Q}G + \mathbf{R})^{-1} G^T \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \mathbf{f}) \quad (4.77)$$

Portanto, para o caso [MIMO](#) sem restrições, $\Delta \hat{\mathbf{u}}^*$ é o vetor que minimiza o índice de desempenho $J(\Delta \hat{\mathbf{u}})$ a partir das matrizes $\mathcal{H}$ e c e do escalar f_0 . Mesmo contendo toda a trajetória predita futura de um horizonte de controle M , o vetor $\Delta \hat{\mathbf{u}}^*$ utiliza apenas o primeiro termo para controlar a planta. Os demais termos são descartados. Para cada período de amostragem k repete-se esse procedimento, o qual é conhecido como controle de horizonte retrocedente.

4.7 MPC com Restrições – caso SISO

A possibilidade de incorporar diferentes tipos de restrições na ação de controle torna o MPC atraente para aplicações práticas. Nesta seção, o problema de controle preditivo será reformulado para levar em consideração três tipos de restrições no problema de otimização que serão expressas como desigualdades lineares. São elas: restrições sobre as entradas na ação e no incremento de controle u e na saída y da planta. A depender da necessidade, é possível também impor restrições sobre os estados. Inicialmente será abordado o problema de restrição sobre entrada e saída únicas, em seguida, sistema com múltiplas entradas e saídas.

Observe que os valores máximos e mínimos das restrições variam por período de amostragem e o símbolo $\leq$ empregado nas inequações lineares representa que a desigualdade é aplicada elemento a elemento.

4.7.1 Restrições sobre os incrementos do controle Δu

Suponha um sistema com entrada única cuja variação mínima da restrição na entrada incremental seja definida por $\Delta u_{\min}$ e a máxima por $\Delta u_{\max}$, com $\Delta u_{\min}, \Delta u_{\max} \in \mathbb{R}$. Assim, a restrição na entrada da planta com respeito ao incremento na ação de controle é dada a partir da seguinte inequação:

$$\Delta u_{\min} \leq \Delta \hat{u}(k+i-1|k) \leq \Delta u_{\max} \quad (4.78)$$

com $i = 1, 2, 3, \dots, M$.

Note que

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \Delta \hat{u}(k|k) & \Delta \hat{u}(k+1|k) & \Delta \hat{u}(k+2|k) & \dots & \Delta \hat{u}(k+M-1|k) \end{bmatrix}^T$$

então a inequação propagada a partir do horizonte de controle pode ser reescrita na forma matricial como:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \Delta u_{\min} \\ \Delta u_{\min} \\ \Delta u_{\min} \\ \vdots \\ \Delta u_{\min} \end{bmatrix}}^{M \times 1} \leq \overbrace{\begin{bmatrix} \Delta \hat{u}(k|k) \\ \Delta \hat{u}(k+1|k) \\ \Delta \hat{u}(k+2|k) \\ \vdots \\ \Delta \hat{u}(k+M-1|k) \end{bmatrix}}^{\Delta \hat{\mathbf{u}}(M \times 1)} \leq \overbrace{\begin{bmatrix} \Delta u_{\max} \\ \Delta u_{\max} \\ \Delta u_{\max} \\ \vdots \\ \Delta u_{\max} \end{bmatrix}}^{M \times 1} \quad (4.79)$$

ou

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{1}_M (M \times 1)} \Delta u_{\min} \leq \overbrace{\begin{bmatrix} \Delta \hat{u}(k|k) \\ \Delta \hat{u}(k+1|k) \\ \Delta \hat{u}(k+2|k) \\ \vdots \\ \Delta \hat{u}(k+M-1|k) \end{bmatrix}}^{\Delta \hat{\mathbf{u}}(M \times 1)} \leq \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{1}_M (M \times 1)} \Delta u_{\max} \quad (4.80)$$

sendo $\mathbf{1}_M$ um vetor coluna de M elementos unitários, lembrando que M representa o horizonte de controle. Reescrevendo a inequação na forma matricial compacta segue que:

$$\mathbf{1}_M \Delta u_{\min} \leq \Delta \hat{\mathbf{u}} \leq \mathbf{1}_M \Delta u_{\max} \quad (4.81)$$

Essa inequação também pode ser representada em termo de um sistema de duas inequações:

$$\begin{cases} \Delta \hat{\mathbf{u}} \leq \mathbf{1}_M \Delta u_{\max} \\ -\Delta \hat{\mathbf{u}} \leq -\mathbf{1}_M \Delta u_{\min} \end{cases} \quad (4.82)$$

e na forma matricial compacta:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} I_M \\ -I_M \end{bmatrix}}^{2M \times M} \Delta \hat{\mathbf{u}} \leq \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{1}_M \Delta u_{\max} \\ -\mathbf{1}_M \Delta u_{\min} \end{bmatrix}}^{2M \times 1} \quad (4.83)$$

Note que I_M é uma matriz identidade de dimensões $M \times M$.

4.7.2 Restrições sobre a ação de controle u

Para um sistema de entrada única, considere $u_{\min}$ e $u_{\max}$ os limites mínimo e máximo da restrição numa entrada na ação de controle, respectivamente, com $u_{\min}, u_{\max} \in \mathbb{R}$. A restrição nessa entrada pode ser expressa a partir da desigualdade:

$$u_{\min} \leq \hat{u}(k+i-1|k) \leq u_{\max} \quad (4.84)$$

com $i = 1, 2, 3, \dots, M$.

Atente que

$$\hat{\mathbf{u}} = [\hat{u}(k|k) \quad \hat{u}(k+1|k) \quad \hat{u}(k+2|k) \quad \dots \quad \hat{u}(k+M-1|k)]^T$$

um vetor coluna com M elementos. Reescrevendo a inequação em termo dos elementos de $\hat{\mathbf{u}}$, tem-se:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} u_{\min} \\ u_{\min} \\ u_{\min} \\ \vdots \\ u_{\min} \end{bmatrix}}^{M \times 1} \leq \overbrace{\begin{bmatrix} \hat{u}(k|k) \\ \hat{u}(k+1|k) \\ \hat{u}(k+2|k) \\ \vdots \\ \hat{u}(k+M-1|k) \end{bmatrix}}^{\hat{\mathbf{u}}(M \times 1)} \leq \overbrace{\begin{bmatrix} u_{\max} \\ u_{\max} \\ u_{\max} \\ \vdots \\ u_{\max} \end{bmatrix}}^{M \times 1} \quad (4.85)$$

ou

$$\begin{array}{c} \mathbf{1}_M (M \times 1) \\ \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right] \end{array} \mathbf{u}_{\min} \leq \begin{array}{c} \hat{\mathbf{u}} (M \times 1) \\ \left[\begin{array}{c} \hat{u}(k|k) \\ \hat{u}(k+1|k) \\ \hat{u}(k+2|k) \\ \vdots \\ \hat{u}(k+M-1|k) \end{array} \right] \end{array} \leq \begin{array}{c} \mathbf{1}_M (M \times 1) \\ \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right] \end{array} \mathbf{u}_{\max} \quad (4.86)$$

e chega-se à representação matricial compacta, sendo $\mathbf{1}_M$ um vetor coluna de M elementos unitários:

$$\mathbf{1}_M \mathbf{u}_{\min} \leq \hat{\mathbf{u}} \leq \mathbf{1}_M \mathbf{u}_{\max} \quad (4.87)$$

Observe que é possível obter a relação entre $\hat{\mathbf{u}}$ e $\Delta \hat{\mathbf{u}}$:

$$\begin{aligned} \hat{u}(k|k) &= u(k-1) + \Delta \hat{u}(k|k) \\ \hat{u}(k+1|k) &= \hat{u}(k|k) + \Delta \hat{u}(k+1|k) \\ &= u(k-1) + \Delta \hat{u}(k|k) + \Delta \hat{u}(k+1|k) \\ \hat{u}(k+2|k) &= \hat{u}(k+1|k) + \Delta \hat{u}(k+2|k) \\ &= \hat{u}(k|k) + \Delta \hat{u}(k+1|k) + \Delta \hat{u}(k+2|k) \\ &= u(k-1) + \Delta \hat{u}(k|k) + \Delta \hat{u}(k+1|k) + \Delta \hat{u}(k+2|k) \\ &\vdots \\ \hat{u}(k+M-1|k) &= u(k-1) + \Delta \hat{u}(k|k) + \Delta \hat{u}(k+1|k) + \Delta \hat{u}(k+2|k) + \cdots \\ &\quad + \Delta \hat{u}(k+M-1|k) \end{aligned} \quad (4.88)$$

Reagrupando os termos na forma matricial, têm-se:

$$\begin{bmatrix} \hat{u}(k|k) \\ \hat{u}(k+1|k) \\ \hat{u}(k+2|k) \\ \vdots \\ \hat{u}(k+M-1|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-1) \\ u(k-1) \\ \vdots \\ u(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \hat{u}(k|k) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \Delta \hat{u}(k|k) & \Delta \hat{u}(k+1|k) & 0 & \cdots & 0 \\ \Delta \hat{u}(k|k) & \Delta \hat{u}(k+1|k) & \Delta \hat{u}(k+2|k) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta \hat{u}(k|k) & \Delta \hat{u}(k+1|k) & \Delta \hat{u}(k+2|k) & \cdots & \Delta \hat{u}(k+M-1|k) \end{bmatrix}$$

Da representação matricial acima obtêm-se uma representação matricial equivalente na qual a restrição na ação de controle $\hat{\mathbf{u}}$ é reescrita em termos da variação de controle $\Delta \hat{\mathbf{u}}$:

$$\begin{array}{c} \hat{\mathbf{u}} (M \times 1) \\ \left[\begin{array}{c} \hat{u}(k|k) \\ \hat{u}(k+1|k) \\ \hat{u}(k+2|k) \\ \vdots \\ \hat{u}(k+M-1|k) \end{array} \right] \end{array} = \begin{array}{c} \mathbf{1}_M (M \times 1) \\ \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right] \end{array} u(k-1) + \begin{array}{c} T_M (M \times M) \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \Delta \hat{\mathbf{u}} (M \times 1) \\ \left[\begin{array}{c} \Delta \hat{u}(k|k) \\ \Delta \hat{u}(k+1|k) \\ \Delta \hat{u}(k+2|k) \\ \vdots \\ \Delta \hat{u}(k+M-1|k) \end{array} \right] \end{array} \quad (4.89)$$

onde T_M é uma matriz triangular inferior unitária de dimensões $M \times M$. Na forma matricial compacta:

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{1}_M u(k-1) + T_M \Delta \hat{\mathbf{u}} \quad (4.90)$$

Substituindo $\hat{\mathbf{u}}$ na Eq. (4.87) segue que:

$$\mathbf{1}_M u_{\min} \leq \mathbf{1}_M u(k-1) + T_M \Delta \hat{\mathbf{u}} \leq \mathbf{1}_M u_{\max} \quad (4.91)$$

Adicionando $-\mathbf{1}_M u(k-1)$ a cada membro da desigualdade obtêm-se desigualdades equivalentes:

$$\mathbf{1}_M u_{\min} - \mathbf{1}_M u(k-1) \leq T_M \Delta \hat{\mathbf{u}} \leq \mathbf{1}_M u_{\max} - \mathbf{1}_M u(k-1) \quad (4.92)$$

Portanto,

$$\mathbf{1}_M [u_{\min} - u(k-1)] \leq T_M \Delta \hat{\mathbf{u}} \leq \mathbf{1}_M [u_{\max} - u(k-1)] \quad (4.93)$$

Essa inequação pode ser expressa em termo de duas inequações:

$$\begin{cases} T_M \Delta \hat{\mathbf{u}} \leq \mathbf{1}_M [u_{\max} - u(k-1)] \\ -T_M \Delta \hat{\mathbf{u}} \leq \mathbf{1}_M [u(k-1) - u_{\min}] \end{cases} \quad (4.94)$$

Na forma matricial:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} T_M \\ -T_M \end{bmatrix}}^{2M \times M} \Delta \hat{\mathbf{u}} \leq \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{1}_M [u_{\max} - u(k-1)] \\ \mathbf{1}_M [u(k-1) - u_{\min}] \end{bmatrix}}^{2M \times 1} \quad (4.95)$$

4.7.3 Restrições sobre a saída y

Sejam $y_{\min}$ o valor mínimo e $y_{\max}$ o valor máximo da saída do sistema, com $y_{\min}, y_{\max} \in \mathbb{R}$, os limites sobre a restrição de uma saída controlada da planta, então:

$$y_{\min} \leq \hat{y}(k+i|k) \leq y_{\max} \quad (4.96)$$

com $i = 1, 2, 3, \dots, N$. Lembrando que N representa o horizonte de predição.

Observe que

$$\hat{\mathbf{y}} = [\hat{y}(k+1|k) \quad \hat{y}(k+2|k) \quad \hat{y}(k+3|k) \quad \dots \quad \hat{y}(k+N|k)]^T$$

Assim, do vetor acima, é possível reescrever a desigualdade com respeito à restrição na saída como:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} y_{\min} \\ y_{\min} \\ y_{\min} \\ \vdots \\ y_{\min} \end{bmatrix}}^{N \times 1} \leq \overbrace{\begin{bmatrix} \hat{y}(k+1|k) \\ \hat{y}(k+2|k) \\ \hat{y}(k+3|k) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+N|k) \end{bmatrix}}^{\hat{\mathbf{y}}(N \times 1)} \leq \overbrace{\begin{bmatrix} y_{\max} \\ y_{\max} \\ y_{\max} \\ \vdots \\ y_{\max} \end{bmatrix}}^{N \times 1} \quad (4.97)$$

ou

$$\begin{array}{c} \mathbf{1}_N (N \times 1) \\ \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right] \end{array} y_{\min} \leq \begin{array}{c} \hat{\mathbf{y}} (N \times 1) \\ \left[\begin{array}{c} \hat{y}(k+1|k) \\ \hat{y}(k+2|k) \\ \hat{y}(k+3|k) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+N|k) \end{array} \right] \end{array} \leq \begin{array}{c} \mathbf{1}_N (N \times 1) \\ \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right] y_{\max} \quad (4.98)$$

onde $\mathbf{1}_N$ representa um vetor coluna de N elementos unitários. Na forma matricial compacta, a inequação anterior assume a forma:

$$\mathbf{1}_N y_{\min} \leq \hat{\mathbf{y}} \leq \mathbf{1}_N y_{\max} \quad (4.99)$$

Da Eq. (4.25) substituindo $\hat{\mathbf{y}}$ na ultima desigualdade obtêm-se uma desigualdade equivalente da restrição da saída na planta em termo do incremento de controle $\Delta \hat{\mathbf{u}}$:

$$\mathbf{1}_N y_{\min} \leq G \Delta \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{f} \leq \mathbf{1}_N y_{\max} \quad (4.100)$$

Portanto, ao somar $-\mathbf{f}$ a cada membro da desigualdade obtêm-se:

$$\mathbf{1}_N y_{\min} - \mathbf{f} \leq G \Delta \hat{\mathbf{u}} \leq \mathbf{1}_N y_{\max} - \mathbf{f} \quad (4.101)$$

onde G é uma matriz com dimensões de $N \times M$ e $\mathbf{f}$ um vetor coluna de N elementos. Observe que é possível expressar a inequação acima em termo de duas inequações:

$$\begin{cases} G \Delta \hat{\mathbf{u}} \leq \mathbf{1}_N y_{\max} - \mathbf{f} \\ -G \Delta \hat{\mathbf{u}} \leq \mathbf{f} - \mathbf{1}_N y_{\min} \end{cases} \quad (4.102)$$

Na forma vetor-matriz:

$$\begin{array}{c} \overbrace{\left[\begin{array}{c} G \\ -G \end{array} \right]}^{2N \times M} \Delta \hat{\mathbf{u}} \leq \overbrace{\left[\begin{array}{c} \mathbf{1}_N y_{\max} - \mathbf{f} \\ \mathbf{f} - \mathbf{1}_N y_{\min} \end{array} \right]}^{2N \times 1} \end{array} \quad (4.103)$$

4.7.4 Reformulação do problema de otimização – caso SISO

Tendo expressado as restrições do processo sobre o incremento $\Delta \hat{\mathbf{u}}$, a ação de controle $\hat{\mathbf{u}}$ e a saída do processo $\hat{\mathbf{y}}$ com respeito à variação na ação de controle $\Delta \hat{\mathbf{u}}$, o problema de otimização do algoritmo MPC consiste em minimizar uma função custo J por meio da programação quadrática expressa na forma:

$$\min_{\Delta \hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^M} J(\Delta \hat{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \Delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathcal{H} \Delta \hat{\mathbf{u}} + c^T \Delta \hat{\mathbf{u}} + f_0 \quad (4.104)$$

sendo

$$\mathcal{H} = 2(G^T G + \rho I), \quad \mathcal{H} > 0$$

$$c^T = 2(\mathbf{f} - \mathbf{r})^T G$$

$$f_0 = (\mathbf{f} - \mathbf{r})^T (\mathbf{f} - \mathbf{r})$$

com respeito a $\Delta \hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^M$, sujeito às restrições do processo:

$$\mathcal{R} \Delta \hat{\mathbf{u}} \leq \gamma \quad (4.105)$$

com

$$\mathcal{R} = \overbrace{\begin{bmatrix} I_M \\ -I_M \\ T_M \\ -T_M \\ G \\ -G \end{bmatrix}}^{(4M+2N) \times M} \quad (4.106)$$

e

$$\gamma = \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{1}_M \Delta u_{\max} \\ -\mathbf{1}_M \Delta u_{\min} \\ \mathbf{1}_M [u_{\max} - u(k-1)] \\ \mathbf{1}_M [u(k-1) - u_{\min}] \\ \mathbf{1}_N y_{\max} - \mathbf{f} \\ \mathbf{f} - \mathbf{1}_N y_{\min} \end{bmatrix}}^{(4M+2N) \times 1} \quad (4.107)$$

Observe que a desigualdade $\mathcal{R} \Delta \hat{\mathbf{u}} \leq \gamma$ representa as restrições nas entradas e saídas do processo.

Da matriz $\mathcal{R}$:

- I_M – matriz identidade de dimensões $M \times M$.
- T_M – matriz triangular inferior unitária de dimensões $M \times M$.
- G – matriz de dimensões $N \times M$, sendo N o horizonte de predição e M o horizonte de controle.

Do vetor γ :

- $\mathbf{1}_M$ – matriz unitária de dimensão $M \times 1$.
- $\mathbf{1}_N$ – matriz unitária de dimensão $N \times 1$.
- $\mathbf{f}$ – matriz de dimensão $N \times 1$.

Note que não é possível obter uma solução algébrica para o índice de desempenho J porque as restrições do sistema **SISO** no incremento e na ação de controle e na saída foram expressas por meio de um conjunto de inequações representadas na forma matricial. Dessa forma, deve-se utilizar algum método de otimização que possa minimizar a função custo J , ou seja, fazer uma busca no domínio de solução para encontrar um valor mínimo ótimo global. Assim, o *solver* `quadprog`¹ do MATLAB[®] pode ser empregado como método de otimização para solucionar o problema de otimização para minimizar o índice de desempenho (a [seção 4.9](#) aborda a programação quadrática e o *solver* `quadprog`).

4.8 MPC com Restrições – caso **MIMO**

Para o caso de múltiplas entradas e saídas, é preciso especificar as restrições para cada entrada e saída independentemente.

4.8.1 Restrições sobre os incrementos do controle Δu

Considere um sistema com p entradas. Seja

$$\Delta \mathbf{u}_{\min} = \begin{bmatrix} \Delta u_1^{\min} \\ \Delta u_2^{\min} \\ \Delta u_3^{\min} \\ \vdots \\ \Delta u_p^{\min} \end{bmatrix}_{p \times 1}, \quad \Delta \mathbf{u}_{\max} = \begin{bmatrix} \Delta u_1^{\max} \\ \Delta u_2^{\max} \\ \Delta u_3^{\max} \\ \vdots \\ \Delta u_p^{\max} \end{bmatrix}_{p \times 1}$$

vetores contendo os limites de restrição mínimos e máximos sobre o incremento de controle, com $\Delta \mathbf{u}_{\min}, \Delta \mathbf{u}_{\max} \in \mathbb{R}^p$. Então,

$$\Delta \mathbf{u}_{\min} \leq \Delta \hat{u}(k+i-1|k) \leq \Delta \mathbf{u}_{\max} \quad (4.108)$$

com $i = 1, 2, \dots, M$.

Note que

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \Delta \hat{u}(k|k) & \Delta \hat{u}(k+1|k) & \Delta \hat{u}(k+2|k) & \dots & \Delta \hat{u}(k+M-1|k) \end{bmatrix}^T$$

Assim, a inequação linear pode ser reescrita na forma matricial como:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{\min} \\ \Delta \mathbf{u}_{\min} \\ \Delta \mathbf{u}_{\min} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{u}_{\min} \end{bmatrix}}^{p \cdot M \times 1} \leq \overbrace{\begin{bmatrix} \Delta \hat{u}(k|k) \\ \Delta \hat{u}(k+1|k) \\ \Delta \hat{u}(k+2|k) \\ \vdots \\ \Delta \hat{u}(k+M-1|k) \end{bmatrix}}^{\Delta \hat{\mathbf{u}}(p \cdot M \times 1)} \leq \overbrace{\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{\max} \\ \Delta \mathbf{u}_{\max} \\ \Delta \mathbf{u}_{\max} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{u}_{\max} \end{bmatrix}}^{p \cdot M \times 1} \quad (4.109)$$

¹ Maiores informações sobre a sintaxe, exemplos e funções do `quadprog` disponível em: https://www.mathworks.com/help/optim/ug/quadprog.html?s_tid=doc_ta.

ou

$$\overbrace{\begin{bmatrix} I_p \\ I_p \\ I_p \\ \vdots \\ I_p \end{bmatrix}}^{p \cdot M \times p} \Delta \mathbf{u}_{\min} \leq \overbrace{\begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{u}}(k|k) \\ \Delta \hat{\mathbf{u}}(k+1|k) \\ \Delta \hat{\mathbf{u}}(k+2|k) \\ \vdots \\ \Delta \hat{\mathbf{u}}(k+M-1|k) \end{bmatrix}}^{\Delta \hat{\mathbf{u}}(p \cdot M \times 1)} \leq \overbrace{\begin{bmatrix} I_p \\ I_p \\ I_p \\ \vdots \\ I_p \end{bmatrix}}^{p \cdot M \times p} \Delta \mathbf{u}_{\max} \quad (4.110)$$

onde I_p é a matriz identidade de dimensões $p \times p$.

Seja

$$[\Delta \mathbf{u}_{\min}]_M = \overbrace{\begin{bmatrix} I_p \\ I_p \\ \vdots \\ I_p \end{bmatrix}}^{p \cdot M \times p} \Delta \mathbf{u}_{\min} \quad , \quad [\Delta \mathbf{u}_{\max}]_M = \overbrace{\begin{bmatrix} I_p \\ I_p \\ \vdots \\ I_p \end{bmatrix}}^{p \cdot M \times p} \Delta \mathbf{u}_{\max}$$

onde $[\Delta \mathbf{u}_{\min}]_M, [\Delta \mathbf{u}_{\max}]_M$ tem dimensão $p \cdot M \times 1$. Logo,

$$[\Delta \mathbf{u}_{\min}]_M \leq \Delta \hat{\mathbf{u}} \leq [\Delta \mathbf{u}_{\max}]_M \quad (4.111)$$

Representando essa inequação linear em termo de um sistema de duas inequações segue que:

$$\begin{cases} \Delta \hat{\mathbf{u}} \leq [\Delta \mathbf{u}_{\max}]_M \\ -\Delta \hat{\mathbf{u}} \leq -[\Delta \mathbf{u}_{\min}]_M \end{cases} \quad (4.112)$$

e na forma matricial compacta:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} I_{pM} \\ -I_{pM} \end{bmatrix}}^{2p \cdot M \times p \cdot M} \Delta \hat{\mathbf{u}} \leq \overbrace{\begin{bmatrix} [\Delta \mathbf{u}_{\max}]_M \\ -[\Delta \mathbf{u}_{\min}]_M \end{bmatrix}}^{2p \cdot M \times 1} \quad (4.113)$$

onde I_{pM} é uma matriz identidade de dimensões $p \cdot M \times p \cdot M$.

4.8.2 Restrições sobre a ação de controle u

Novamente, considere um sistema com p entradas. Seja

$$\mathbf{u}_{\min} = \begin{bmatrix} u_1^{\min} \\ u_2^{\min} \\ u_3^{\min} \\ \vdots \\ u_p^{\min} \end{bmatrix}_{p \times 1} \quad , \quad \mathbf{u}_{\max} = \begin{bmatrix} u_1^{\max} \\ u_2^{\max} \\ u_3^{\max} \\ \vdots \\ u_p^{\max} \end{bmatrix}_{p \times 1}$$

vetores contendo os valores de restrição mínimos e máximos nas entradas controladas, com $\mathbf{u}_{\min}, \mathbf{u}_{\max} \in \mathbb{R}^p$. Logo,

$$\mathbf{u}_{\min} \leq \hat{u}(k+i-1|k) \leq \mathbf{u}_{\max} \quad (4.114)$$

com $i = 1, 2, 3, \dots, M$.

Atente que

$$\hat{\mathbf{u}} = [\hat{u}(k|k) \quad \hat{u}(k+1|k) \quad \hat{u}(k+2|k) \quad \dots \quad \hat{u}(k+M-1|k)]^T$$

um vetor composto por M elementos, lembrando que M representa o horizonte de controle. Reescrevendo a inequação em termos dos elementos de $\hat{\mathbf{u}}$, têm-se:

$$\begin{array}{ccc} \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\min} \\ \mathbf{u}_{\min} \\ \mathbf{u}_{\min} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{\min} \end{bmatrix}}^{p \cdot M \times 1} & \leq & \overbrace{\begin{bmatrix} \hat{u}(k|k) \\ \hat{u}(k+1|k) \\ \hat{u}(k+2|k) \\ \vdots \\ \hat{u}(k+M-1|k) \end{bmatrix}}^{\hat{\mathbf{u}}(p \cdot M \times 1)} & \leq & \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\max} \\ \mathbf{u}_{\max} \\ \mathbf{u}_{\max} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{\max} \end{bmatrix}}^{p \cdot M \times 1} \end{array} \quad (4.115)$$

ou

$$\begin{array}{ccc} \overbrace{\begin{bmatrix} I_p \\ I_p \\ I_p \\ \vdots \\ I_p \end{bmatrix}}^{p \cdot M \times p} \mathbf{u}_{\min} & \leq & \overbrace{\begin{bmatrix} \hat{u}(k|k) \\ \hat{u}(k+1|k) \\ \hat{u}(k+2|k) \\ \vdots \\ \hat{u}(k+M-1|k) \end{bmatrix}}^{\hat{\mathbf{u}}(p \cdot M \times 1)} & \leq & \overbrace{\begin{bmatrix} I_p \\ I_p \\ I_p \\ \vdots \\ I_p \end{bmatrix}}^{p \cdot M \times p} \mathbf{u}_{\max} \end{array} \quad (4.116)$$

sendo I_p a matriz identidade de dimensões $p \times p$.

Considerando

$$[\mathbf{u}_{\min}]_M = \overbrace{\begin{bmatrix} I_p \\ I_p \\ \vdots \\ I_p \end{bmatrix}}^{p \cdot M \times p} \mathbf{u}_{\min} \quad , \quad [\mathbf{u}_{\max}]_M = \overbrace{\begin{bmatrix} I_p \\ I_p \\ \vdots \\ I_p \end{bmatrix}}^{p \cdot M \times p} \mathbf{u}_{\max}$$

segue que

$$[\mathbf{u}_{\min}]_M \leq \hat{\mathbf{u}} \leq [\mathbf{u}_{\max}]_M \quad (4.117)$$

e obtêm-se a representação matricial compacta da desigualdade linear expressa em termos da ação de controle $\hat{\mathbf{u}}$.

De posse das desigualdades lineares em termos do conjunto de restrições no incremento $\Delta \hat{\mathbf{u}}$ e na ação de controle $\hat{\mathbf{u}}$, o próximo passo é obter uma relação entre $\hat{\mathbf{u}}$ e $\Delta \hat{\mathbf{u}}$ de

modo a expressar as restrições em termos de $\Delta\hat{\mathbf{u}}$ e relacionar ao problema de otimização do horizonte retrocedente. Observe que:

$$\begin{aligned}
 \hat{u}(k|k) &= u(k-1) + \Delta\hat{u}(k|k) \\
 \hat{u}(k+1|k) &= \hat{u}(k|k) + \Delta\hat{u}(k+1|k) \\
 &= u(k-1) + \Delta\hat{u}(k|k) + \Delta\hat{u}(k+1|k) \\
 \hat{u}(k+2|k) &= \hat{u}(k+1|k) + \Delta\hat{u}(k+2|k) \\
 &= \hat{u}(k|k) + \Delta\hat{u}(k+1|k) + \Delta\hat{u}(k+2|k) \\
 &= u(k-1) + \Delta\hat{u}(k|k) + \Delta\hat{u}(k+1|k) + \Delta\hat{u}(k+2|k) \\
 &\vdots \\
 \hat{u}(k+M-1|k) &= u(k-1) + \Delta\hat{u}(k|k) + \Delta\hat{u}(k+1|k) + \Delta\hat{u}(k+2|k) + \cdots \\
 &\quad + \Delta\hat{u}(k+M-1|k)
 \end{aligned} \tag{4.118}$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \hat{u}(k|k) \\ \hat{u}(k+1|k) \\ \hat{u}(k+2|k) \\ \vdots \\ \hat{u}(k+M-1|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-1) \\ u(k-1) \\ \vdots \\ u(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\hat{u}(k|k) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \Delta\hat{u}(k|k) & \Delta\hat{u}(k+1|k) & 0 & \cdots & 0 \\ \Delta\hat{u}(k|k) & \Delta\hat{u}(k+1|k) & \Delta\hat{u}(k+2|k) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta\hat{u}(k|k) & \Delta\hat{u}(k+1|k) & \Delta\hat{u}(k+2|k) & \cdots & \Delta\hat{u}(k+M-1|k) \end{bmatrix}$$

Dessa representação obtêm-se a relação entre a ação de controle $\hat{\mathbf{u}}$ e a variação de controle $\Delta\hat{\mathbf{u}}$:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \hat{u}(k|k) \\ \hat{u}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{u}(k+M-1|k) \end{bmatrix}}^{\hat{\mathbf{u}}(p \cdot M \times 1)} = \overbrace{\begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-1) \\ \vdots \\ u(k-1) \end{bmatrix}}^{u(k-1)_M (p \cdot M \times 1)} + \overbrace{\begin{bmatrix} I_p & 0_{p \times p} & \cdots & 0_{p \times p} \\ I_p & I_p & \cdots & 0_{p \times p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_p & I_p & \cdots & I_p \end{bmatrix}}^{T_M^{I_p} (p \cdot M \times p \cdot M)} \overbrace{\begin{bmatrix} \Delta\hat{u}(k|k) \\ \Delta\hat{u}(k+1|k) \\ \vdots \\ \Delta\hat{u}(k+M-1|k) \end{bmatrix}}^{\Delta\hat{\mathbf{u}}(p \cdot M \times 1)} \tag{4.119}$$

Na forma compacta, sendo $T_M^{I_p}$ é uma matriz triangular inferior de dimensões $p \cdot M \times p \cdot M$, I_p e $0_{p \times p}$ são matrizes identidade e nula, respectivamente, de dimensões $p \times p$, tem-se:

$$\hat{\mathbf{u}} = [u(k-1)]_M + T_M^{I_p} \Delta\hat{\mathbf{u}} \tag{4.120}$$

Substituindo $\hat{\mathbf{u}}$ na Eq. (4.117) segue que:

$$[\mathbf{u}_{\min}]_M \leq [u(k-1)]_M + T_M^{I_p} \Delta\hat{\mathbf{u}} \leq [\mathbf{u}_{\max}]_M \tag{4.121}$$

Adicionando $-[u(k-1)]_M$ a cada membro da desigualdade obtêm-se desigualdades equivalentes:

$$[\mathbf{u}_{\min}]_M - [u(k-1)]_M \leq T_M^{I_p} \Delta\hat{\mathbf{u}} \leq [\mathbf{u}_{\max}]_M - [u(k-1)]_M \tag{4.122}$$

Portanto,

$$[\mathbf{u}_{\min} - u(k-1)]_M \leq T_M^{I_p} \Delta \hat{\mathbf{u}} \leq [\mathbf{u}_{\max} - u(k-1)]_M \quad (4.123)$$

Essa inequação pode ser expressa em termo de duas inequações:

$$\begin{cases} T_M^{I_p} \Delta \hat{\mathbf{u}} \leq [\mathbf{u}_{\max} - u(k-1)]_M \\ -T_M^{I_p} \Delta \hat{\mathbf{u}} \leq [u(k-1) - \mathbf{u}_{\min}]_M \end{cases} \quad (4.124)$$

e também na forma matricial compacta:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} T_M^{I_p} \\ -T_M^{I_p} \end{bmatrix}}^{2p \cdot M \times p \cdot M} \Delta \hat{\mathbf{u}} \leq \overbrace{\begin{bmatrix} [\mathbf{u}_{\max} - u(k-1)]_M \\ [u(k-1) - \mathbf{u}_{\min}]_M \end{bmatrix}}^{2p \cdot M \times 1} \quad (4.125)$$

4.8.3 Restrições sobre a saída y

Considere um sistema com q saídas controladas. Seja

$$\mathbf{y}_{\min} = \begin{bmatrix} y_1^{\min} \\ y_2^{\min} \\ y_3^{\min} \\ \vdots \\ y_q^{\min} \end{bmatrix}_{q \times 1}, \quad \mathbf{y}_{\max} = \begin{bmatrix} y_1^{\max} \\ y_2^{\max} \\ y_3^{\max} \\ \vdots \\ y_q^{\max} \end{bmatrix}_{q \times 1}$$

vetores contendo os valores de restrição mínimo e máximo nas q saídas controladas, sendo $\mathbf{y}_{\min}, \mathbf{y}_{\max} \in \mathbb{R}^q$. Logo,

$$\mathbf{y}_{\min} \leq \hat{y}(k+i|k) \leq \mathbf{y}_{\max} \quad (4.126)$$

com $i = 1, 2, 3, \dots, N$. Atente que N representa o horizonte de predição.

Observe que

$$\hat{\mathbf{y}} = [\hat{y}(k+1|k) \quad \hat{y}(k+2|k) \quad \hat{y}(k+3|k) \quad \dots \quad \hat{y}(k+N|k)]^T$$

Assim, do vetor acima, é possível reescrever a desigualdade com respeito aos vetores $\mathbf{y}_{\min}$ e $\mathbf{y}_{\max}$:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}_{\min} \\ \mathbf{y}_{\min} \\ \mathbf{y}_{\min} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{\min} \end{bmatrix}}^{q \cdot N \times 1} \leq \overbrace{\begin{bmatrix} \hat{y}(k+1|k) \\ \hat{y}(k+2|k) \\ \hat{y}(k+3|k) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+N|k) \end{bmatrix}}^{\hat{\mathbf{y}}(q \cdot N \times 1)} \leq \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}_{\max} \\ \mathbf{y}_{\max} \\ \mathbf{y}_{\max} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{\max} \end{bmatrix}}^{q \cdot N \times 1} \quad (4.127)$$

ou

$$\overbrace{\begin{bmatrix} I_q \\ I_q \\ I_q \\ \vdots \\ I_q \end{bmatrix}}^{q \cdot N \times q} \mathbf{y}_{\min} \leq \overbrace{\begin{bmatrix} \hat{y}(k+1|k) \\ \hat{y}(k+2|k) \\ \hat{y}(k+3|k) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+N|k) \end{bmatrix}}^{\hat{\mathbf{y}}(q \cdot N \times 1)} \leq \overbrace{\begin{bmatrix} I_q \\ I_q \\ I_q \\ \vdots \\ I_q \end{bmatrix}}^{q \cdot N \times q} \mathbf{y}_{\max} \quad (4.128)$$

I_q representa a matriz identidade de dimensões $q \times q$.

Considere agora

$$[\mathbf{y}_{\min}]_N = \overbrace{\begin{bmatrix} I_q \\ I_q \\ \vdots \\ I_q \end{bmatrix}}^{q \cdot N \times q} \mathbf{y}_{\min} \quad , \quad [\mathbf{y}_{\max}]_N = \overbrace{\begin{bmatrix} I_q \\ I_q \\ \vdots \\ I_q \end{bmatrix}}^{q \cdot N \times q} \mathbf{y}_{\max}$$

então, na forma matricial compacta:

$$[\mathbf{y}_{\min}]_N \leq \hat{\mathbf{y}} \leq [\mathbf{y}_{\max}]_N \quad (4.129)$$

Substituindo $\hat{\mathbf{y}} = G\Delta\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{f}$ na ultima inequação, onde G é uma matriz de dimensões $q \cdot N \times p \cdot M$, $\Delta\hat{\mathbf{u}}$ tem dimensão $p \cdot M \times 1$ e $\mathbf{f}$ tem dimensão $q \cdot N \times 1$, obtêm-se a desigualdade equivalente:

$$[\mathbf{y}_{\min}]_N \leq G\Delta\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{f} \leq [\mathbf{y}_{\max}]_N \quad (4.130)$$

Portanto, ao somar $-\mathbf{f}$ a cada membro da inequação obtêm-se:

$$[\mathbf{y}_{\min}]_N - \mathbf{f} \leq G\Delta\hat{\mathbf{u}} \leq [\mathbf{y}_{\max}]_N - \mathbf{f} \quad (4.131)$$

Expressando a última inequação em termo de duas inequações segue que:

$$\begin{cases} G\Delta\hat{\mathbf{u}} \leq [\mathbf{y}_{\max}]_N - \mathbf{f} \\ -G\Delta\hat{\mathbf{u}} \leq \mathbf{f} - [\mathbf{y}_{\min}]_N \end{cases} \quad (4.132)$$

Na forma matricial:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} G \\ -G \end{bmatrix}}^{2q \cdot N \times p \cdot M} \Delta\hat{\mathbf{u}} \leq \overbrace{\begin{bmatrix} [\mathbf{y}_{\max}]_N - \mathbf{f} \\ \mathbf{f} - [\mathbf{y}_{\min}]_N \end{bmatrix}}^{2q \cdot N \times 1} \quad (4.133)$$

4.8.4 Reformulação do problema de otimização – caso MIMO

Na prática, todos os processos estão propensos a restrições. Para o problema de otimização com restrições, não é possível minimizar o índice de desempenho de forma algébrica devido as inequações das restrições. Analogamente ao caso SISO, após impor restrições nas entradas e saídas do processo, o problema de otimização a ser resolvido pelo algoritmo MPC consiste na minimização do índice de desempenho conhecido como função custo posto na forma de programação quadrática como:

$$\min_{\Delta \hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{pM}} J(\Delta \hat{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \Delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathcal{H} \Delta \hat{\mathbf{u}} + c^T \Delta \hat{\mathbf{u}} + f_0 \quad (4.134)$$

onde

$$\mathcal{H} = 2(G^T \mathbf{Q} G + \mathbf{R}), \quad \mathcal{H} > 0$$

$$c^T = 2(\mathbf{f} - \mathbf{r})^T \mathbf{Q} G$$

$$f_0 = (\mathbf{f} - \mathbf{r})^T \mathbf{Q} (\mathbf{f} - \mathbf{r})$$

sujeito às restrições:

$$\mathcal{R} \Delta \hat{\mathbf{u}} \leq \gamma \quad (4.135)$$

com

$$\mathcal{R} = \begin{matrix} (4p \cdot M + 2q \cdot N) \times p \cdot M \\ \left[\begin{array}{c} I_{pM} \\ -I_{pM} \\ T_M^{I_p} \\ -T_M^{I_p} \\ G \\ -G \end{array} \right] \end{matrix} \quad (4.136)$$

e

$$\gamma = \begin{matrix} (4p \cdot M + 2q \cdot N) \times 1 \\ \left[\begin{array}{c} [\Delta \mathbf{u}_{\max}]_M \\ -[\Delta \mathbf{u}_{\min}]_M \\ [\mathbf{u}_{\max} - u(k-1)]_M \\ [u(k-1) - \mathbf{u}_{\min}]_M \\ [\mathbf{y}_{\max}]_N - \mathbf{f} \\ \mathbf{f} - [\mathbf{y}_{\min}]_N \end{array} \right] \end{matrix} \quad (4.137)$$

Da matriz $\mathcal{R}$:

- I_{pM} – matriz identidade de dimensões $p \cdot M \times p \cdot M$.
- $T_M^{I_p}$ – matriz triangular inferior de dimensões $p \cdot M \times p \cdot M$ cujos elementos nulos correspondem a matrizes nula de dimensões $p \times p$ e os não nulos correspondem a matrizes identidade de dimensões $M \times M$.

- G – matriz de dimensões $q \cdot N \times p \cdot M$, sendo N o horizonte de predição, M o horizonte de controle, p o número de entradas e q o número de saídas.

Do vetor γ :

- $[\Delta u_{\max}]_M, [\Delta u_{\min}]_M$ – matrizes de dimensão $p \cdot M \times 1$.
- $[u_{\max}]_M, [u(k-1)]_M, [u_{\min}]_M$ – matrizes de dimensão $p \cdot M \times 1$.
- $[y_{\max}]_N, [y_{\min}]_N, \mathbf{f}$ – matrizes de dimensão $q \cdot N \times 1$.

Note que $\mathcal{R}$ é uma matriz que contém as restrições, onde o número de linhas equivale ao número de restrições e o número de colunas é igual à dimensão da variável de decisão $\Delta \hat{\mathbf{u}}$ ($p \cdot M \times 1$). Neste caso, o número de restrições equivale a $4p \cdot M + 2q \cdot N$, onde p representa o número de entradas e q o de saída do sistema [MIMO](#). γ é o vetor coluna dos termos independentes de dimensão $4p \cdot M + 2q \cdot N$.

4.9 Programação Quadrática

Nos algoritmos [MPC](#) as principais funções objetivo J são estruturadas de forma quadrática, logo faz-se necessário incorporar um método de otimização quadrática a eles pelo qual a função custo seja minimizada sujeita às restrições do processo. Um método a ser utilizado para minimizar o índice de desempenho é a Programação Quadrática ([QP](#)), a qual consiste em encontrar um vetor coluna v que minimize J . Existem diversos métodos de otimização para funções quadráticas, dentre eles o `quadprog` presente no ambiente de simulação numérica MATLAB[®].

`quadprog` é um *solver* de Programação Quadrática ([QP](#)) desenvolvido pela MATHWORKS[®] cujo objetivo é encontrar um valor mínimo de funções quadráticas na forma:

$$\min_v \left\{ \frac{1}{2} v^T \mathcal{H} v + v^T F \right\} \quad (4.138)$$

sujeitas às restrições lineares

$$\mathcal{R}v \leq \gamma, \quad (4.139)$$

$$\mathcal{R}_{eq}v = \gamma_{eq}, \quad (4.140)$$

$$l_\gamma \leq v \leq u_\gamma \quad (4.141)$$

com $\mathcal{H}$, $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}_{eq}$ matrizes e v , γ , F , γ_{eq} , l_γ e u_γ vetores. Note que as Eqs. (4.139) e (4.140) representam conjuntos de desigualdade e igualdade de restrições, respectivamente, e a Eq. (4.141) os limites ou fronteiras de restrição sobre v .

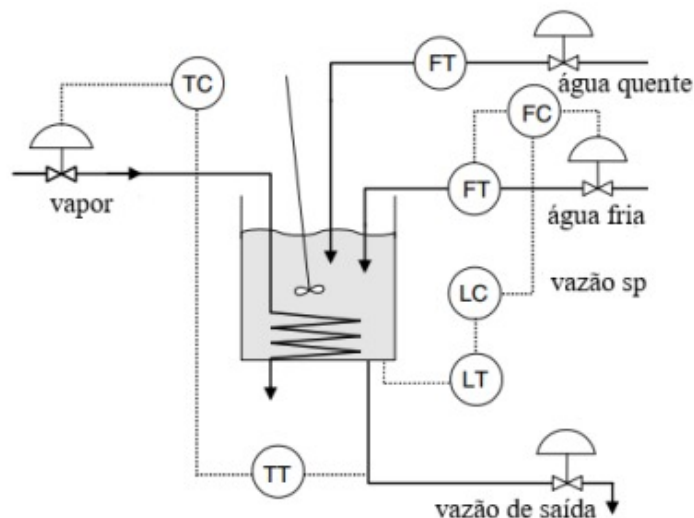
5 ESTUDO DE CASO

O processo Tanque Aquecedor Agitado Contínuo (CSTH) é apresentado neste capítulo. O ponto de operação linearizado do processo representado em modelo de função de transferência será aplicado no MPC discreto incremental MIMO. Nas simulações, objetiva-se controlar as saídas nível, vazão de água fria e temperatura para que estas sigam os seus respectivos valores de referência ao manipular as entradas vazão de água fria, vazão de vapor e vazão de água quente, além de atender as restrições na entrada e rejeitar perturbações.

5.1 O Tanque Aquecedor Agitado Contínuo

A planta piloto do estudo de caso é uma plataforma experimental didática de um tanque de aquecimento agitado contínuo proposto por Thornhill, Patwardhan e Shah (2008). No processo, uma vazão de água quente e outra de água fria são misturadas e, posteriormente, aquecidas com vapor por meio de uma serpentina de aquecimento. Considera-se o CSTH bem misturado e, portanto, assume-se as temperaturas do tanque e de saída iguais. O tanque experimental possui seção transversal circular com volume de 8 L e altura de 50 cm. A Figura 3 mostra a configuração dessa planta. As variáveis manipuladas (MV) do processo CSTH são a vazão de água fria (CW – *cold water*), vazão de vapor (*steam*) e vazão de água quente (HW – *hot water*), enquanto as variáveis controladas (PV) são o nível, a vazão de água fria (CW) e a temperatura.

Figura 3 – Representação do Tanque Aquecedor Agitado Contínuo.



Fonte: Adaptado de Thornhill, Patwardhan e Shah (2008).

5.2 Instrumentação da Planta C_{STH}

Vazão de água quente (HW) e de água fria (CW) fornecidas ao tanque são pressurizadas por uma bomba na faixa de 60 a 80 psi. As válvulas de controle da planta C_{STH} são atuadores pneumáticos de ar comprimido de 3 a 15 psi. Os sensores de fluxo são placas de orifício com transmissores de pressão com saída nominal de 4 a 20 mA. O sensor de nível também é um instrumento de pressão. Quanto ao sensor de temperatura, este é um termopar do tipo J com revestimento de metal inserido no tubo de saída do tanque. As entradas e saídas da planta C_{STH} são sinais elétricos na faixa de 4 a 20 mA.

Válvulas de controle, transmissores de vazão, transmissor de nível e transmissor de temperatura compõem a instrumentação da planta como mostra a Tabela 1.

Tabela 1 – Instrumentação da planta C_{STH}.

Elemento da malha	Identificador
Controlador de vazão	FC
Transmissor de vazão	FT
Controlador de nível	LC
Transmissor de nível	LT
Controlador de temperatura	TC
Transmissor de temperatura	TT

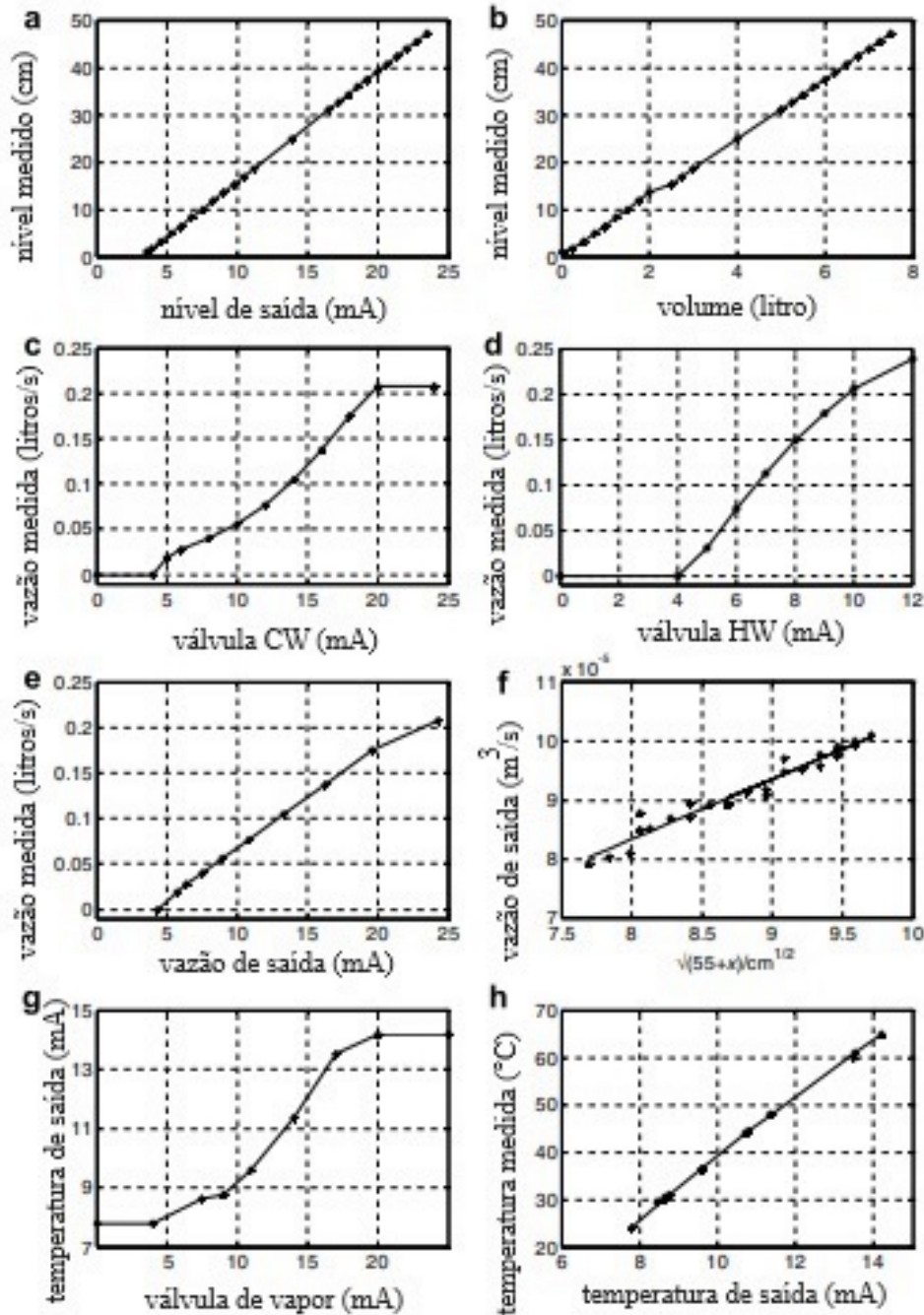
Thornhill, Patwardhan e Shah (2008) desenvolveram um simulador no ambiente de simulação numérica MATLAB[®]/Simulink[®] do processo C_{STH} com base nas equações de balanços térmico e volumétrico. Diferentemente do processo C_{STR}, não há reação química no processo C_{STH}.

5.3 Calibração dos Sensores e Atuadores do Processo C_{STH}

A relação entre nível e volume da planta C_{STH} é não linear devido o volume ocupado pelas serpentinas de aquecimento a vapor na metade inferior do tanque, a qual foi obtida experimentalmente. Todos os sensores e válvulas foram bem caracterizados. As temperaturas de entrada da água quente e fria foram definidas em 50°C e 24°C, respectivamente. A válvula de saída manual foi fixada em 50%. O instrumento de nível converte o nível do tanque para uma saída de instrumento na faixa de 4 a 20 mA. A válvula de água fria (CW) está totalmente fechada em 4 mA e totalmente aberta em 20 mA. A calibração do instrumento de vazão de água fria é quase linear na faixa de 4 a 20 mA desse instrumento, todavia a taxa máxima de vazão fornece uma medição além do final da faixa quando a válvula está totalmente aberta e um atraso de tempo de 1 s. A válvula de água quente (HW) está superdimensionada, não sendo possível calibrá-la acima de 12 mA devido a possibilidade do tanque transbordar. A relação entre a temperatura do termopar

na saída e a temperatura no tanque é quase linear. A Figura 4 apresenta as curvas de calibração dos instrumentos da planta Tanque Aquecedor Agitado Contínuo (CSTH).

Figura 4 – Curvas de calibração do processo CSTH. (a) transmissor de nível (LT), (b) relação entre volume e nível, (c) válvula de vazão de água fria (CW), (d) válvula de vazão de água quente (HW), (e) transmissor de vazão de saída (FT), (f) calibração do fluxo de saída, (g) válvula de vapor (steam) e (h) transmissor de temperatura (TT).



Fonte: Adaptado de Thornhill, Patwardhan e Shah (2008).

5.4 Linearização do Modelo C_{STH}

Devido a não linearidade, o modelo da planta C_{STH} foi linearizado em dois pontos de operação, nos quais tais modelos linearizados são representados em espaço de estados e função de transferência. No primeiro ponto (Ponto 1) a planta opera com alimentação de água fria (CW), enquanto no segundo ponto (Ponto 2) ela é operado com alimentação de água quente (HW) e de água fria (CW). Nas simulações do processo empregou-se o modelo linear de função de transferência do ponto de operação 2. As posições das válvulas em estado estacionário e as condições dos instrumentos em cada ponto de operação estão apresentadas na Tabela 2 (THORNHILL; PATWARDHAN; SHAH, 2008).

Tabela 2 – Pontos de operação do modelo C_{STH} linearizado.

Variável	Ponto 1	Ponto 2
Nível/mA	12,00	12,00
Nível/cm	20,48	20,48
Vazão CW/mA	11,89	7,330
Vazão CW/m ³ s ⁻¹	$9,038 \times 10^{-5}$	$3,823 \times 10^{-5}$
Válvula CW/mA	12,96	7,704
Temperatura/mA	10,50	10,50
Temperatura/°C	42,52	42,52
Válvula de vapor/mA	12,57	6,053
Válvula HW/mA	0	5,500
Vazão HW/m ³ s ⁻¹	0	$5,215 \times 10^{-5}$

O objetivo do MPC discreto incremental MIMO sob a abordagem de espaço de estados aplicado ao modelo linear da planta C_{STH} do ponto de operação 2 é o controle das variáveis controladas nível (y_1), vazão de água fria (y_2) e temperatura (y_3) manipulando as entradas do processo vazão de água fria (u_1), vazão de vapor (u_2) e vazão de água quente (u_3). Isto é, objetiva-se conduzir as saídas do processo aos seus respectivos valores de referências ao manipular a entrada de água fria e quente no tanque, além do fornecimento de vapor. A Tabela 3 apresenta as variáveis de entrada e saída da planta, enquanto a Tabela 4 mostra os valores de referência para as variáveis controladas do processo.

Tabela 3 – Variáveis do processo C_{STH}.

Ponto de operação			
Variáveis manipuladas	u_1	Vazão CW/mA	7,330
	u_2	Vazão vapor/mA	6,053
	u_3	Vazão HW/mA	5,500
Variáveis controladas	y_1	Nível/mA	12,00
	y_2	Vazão CW/mA	7,330
	y_3	Temperatura/mA	10,50

Tabela 4 – Referências para as variáveis controladas do processo CSTH.

Ponto de operação			
Referências (<i>setpoints</i>)	$y_{ref,1}$	Nível/mA	12,00
	$y_{ref,2}$	Vazão CW/mA	7,330
	$y_{ref,3}$	Temperatura/mA	10,50

5.4.1 Ponto de Operação 2 do Processo CSTH

5.4.1.1 Modelo em espaço de estados em malha aberta

O modelo linear em espaço de estados da planta CSTH é dada por:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}' \quad (5.1)$$

$$\mathbf{y}' = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (5.2)$$

ou

$$\begin{pmatrix} u'_1(t) \\ u'_2(t) \\ u'_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(t-1) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'_1(t) \\ y'_2(t) \\ y'_3(t-8) \end{pmatrix}$$

onde u_1 representa a posição da válvula de água fria (CW) em mA; u_2 a posição da válvula de vapor em mA; u_3 a posição da válvula de água quente (HW) em mA; y_1 o nível medido em mA; y_2 a vazão de água fria medida em mA; y_3 a temperatura medida em mA. Conforme observado, a válvula de água fria possui um atraso de tempo de 1,0 s, enquanto a variável temperatura um atraso de 8,0 s (THORNHILL; PATWARDHAN; SHAH, 2008).

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3,7313 \times 10^{-3} & 1,5789 \times 10^{-6} & 0 \\ 0 & -2,6316 \times 10^{-1} & 0 \\ 4,1580 \times 10^3 & 1,5842 \times 10^{-1} & -2,7316 \times 10^{-2} \end{pmatrix} \quad (5.3a)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4,2900 \times 10^{-5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6,4000 \times 10^{-1} & 8,8712 \end{pmatrix} \quad (5.3b)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2.690,0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5132 \times 10^{-1} & 0 \\ -1.979,2 & 0 & 1,1226 \times 10^{-2} \end{pmatrix} \quad (5.3c)$$

5.4.1.2 Modelo em função de transferência em malha aberta

O modelo linear em função de transferência da planta **CSTH** é representado por:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s) = \begin{pmatrix} G_{11}(s) & 0 & G_{13}(s) \\ G_{21}(s) & 0 & 0 \\ G_{31}(s) & G_{32}(s) & G_{33}(s) \end{pmatrix} \mathbf{U}(s) \quad (5.4)$$

onde $\mathbf{Y}(s)$ e $\mathbf{U}(s)$ representam a transformada de Laplace das variáveis de saída e entrada do sistema, respectivamente. Note que

$$G_{11}(s) = \frac{4,2474 \times 10^{-3} e^{-s}}{(s + 3,731 \times 10^{-3})(s + 2,632 \times 10^{-1})} \quad (5.5a)$$

$$G_{21}(s) = \frac{1,5132 \times 10^{-1} e^{-s}}{(s + 2,632 \times 10^{-1})} \quad (5.5b)$$

$$G_{31}(s) = \frac{-3,1466 \times 10^{-3} e^{-9s}}{(s + 2,732 \times 10^{-2})(s + 2,632 \times 10^{-1})} \quad (5.5c)$$

$$G_{32}(s) = \frac{7,1849 \times 10^{-3} e^{-8s}}{(s + 2,732 \times 10^{-2})} \quad (5.5d)$$

$$G_{13}(s) = \frac{1,1540 \times 10^{-1}}{(s + 3,731 \times 10^{-3})} \quad (5.5e)$$

$$G_{33}(s) = \frac{1,4683 \times 10^{-2} e^{-8s}}{(s + 2,732 \times 10^{-2})} \quad (5.5f)$$

6 RESULTADOS E DISCUSSÃO

No âmbito deste estudo, o presente capítulo aborda a aplicação do controle preditivo discreto incremental multivariável no contexto do processo do Tanque Aquecedor Agitado Contínuo (CSTH).

6.1 Sintonia do MPC Aplicado ao CSTH

No ambiente de simulação numérica MATLAB[®] desenvolveu-se o MPC a partir da abordagem de espaço de estados. No projeto do otimizador foi utilizado o modelo linear de função de transferência da planta CSTH indicado no Capítulo 5 e no ponto de operação 2. A seleção deste ponto se justifica pela sua abrangência em termos da operação, proporcionando a oportunidade de explorar uma variedade mais ampla de variáveis manipuladas. Neste modelo, conforme apresentado na Tabela 5, as variáveis manipuladas do processo são a vazão de água fria (CW – *cold water*), vazão de vapor (*steam*) e vazão de água quente (HW – *hot water*), respectivamente, enquanto as variáveis controladas são os sensores de nível, vazão de água fria e temperatura, respectivamente, além dos valores de referências para as saídas controladas.

Tabela 5 – Ponto de operação do CSTH.

Ponto de operação			
Variáveis manipuladas	u_1	Vazão CW/mA	7,330
	u_2	Válvula de vapor/mA	6,053
	u_3	Vazão HW/mA	5,500
Variáveis controladas	y_1	Nível/mA	12,00
	y_2	Vazão CW/mA	7,330
	y_3	Temperatura/mA	10,50
Referências (<i>setpoints</i>)	$y_{ref,1}$	Nível/mA	12,00
	$y_{ref,2}$	Vazão CW/mA	7,330
	$y_{ref,3}$	Temperatura/mA	10,50

Note que, da Tabela 5, obtêm-se $u_{ss} = [7,330 \ 6,053 \ 5,500]^T$, o vetor de estado estacionário das entradas manipuladas e $y_{ref} = [12,00 \ 7,330 \ 10,50]^T$, o vetor de referências (*setpoint*) das saídas controladas. Considerou-se o vetor de estado estacionário das saídas controladas igual ao vetor de referência, isto é, $y_{ss} = y_{ref}$. Considerou-se também como referência para os valores de restrição nas entradas os limites mínimos (u_{min}) e máximos (u_{max}) o vetor de estado estacionário das variáveis manipuladas.

A Tabela 6 lista alguns parâmetros de sintonia do otimizador MPC aplicados na simulação da planta CSTH na plataforma de programação e computação numérica MATLAB®. A sintonia dos parâmetros MPC empregados no controle do modelo linear de função de transferência da planta de três entradas e três saídas deu-se a partir das simulações e verificação do desempenho da resposta das saídas do sistema às variáveis manipuladas do processo. Os limites mínimo e máximo de restrição nas entradas manipuladas da planta foram obtidos a partir das simulações tendo como referência a faixa de operação dos sinais elétricos dos atuadores, sendo 4 a 20 mA a faixa de operação das válvulas de vazão de água fria e de vapor, e 4 a 12 mA a faixa da válvula de vazão de água quente. Neste caso considerou-se a imposição de restrição somente nas entradas do processo. Os limites de restrição mínimos atribuídos às variáveis manipuladas vazão de água fria, vazão de vapor e vazão de água quente equivalem aos valores 6, 4 e 4, respectivamente, enquanto os limites máximos equivalem a 12, 16 e 8, respectivamente. Atribuiu-se peso unitário às variáveis manipuladas na matriz de supressão (R).

Em relação a importância das variáveis controladas, obteve-se os pesos da matriz de ponderação (Q) para as saídas da planta a partir da resposta do MPC às variações dos valores de referência das variáveis controladas. Note que o peso $\mu_1 = 1$ corresponde ao peso da variável controlada nível, o peso $\mu_2 = 4$ ao peso da PV vazão de água fria e o peso $\mu_3 = 7$ ao peso da variável temperatura. É possível observar que o otimizador prioriza o controle da variável temperatura devido ao maior peso atribuído a essa PV na matriz de ponderação. Levou-se em conta os testes de variação de *setpoint* ao atribuir o valor do horizonte de simulação do modelo.

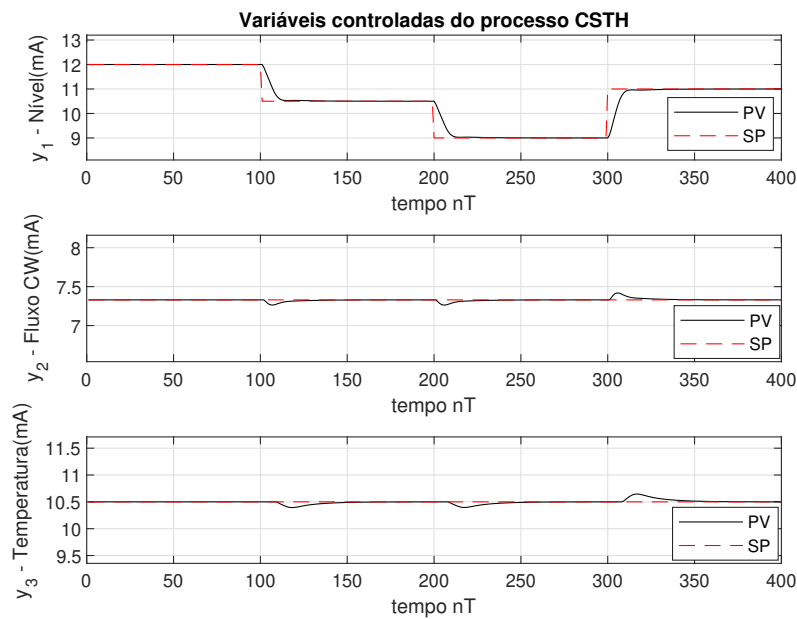
Tabela 6 – Parâmetros de sintonia do controlador MPC.

Parâmetro	Descrição	Valor
T_s	Tempo de amostragem	1 s
nT	Horizonte de simulação do modelo	400
N	Horizonte de predição	50
M	Horizonte de controle	3
$\Delta u_{\max}$	Limite máximo de incremento nas entradas	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
$u_{\max}$	Limite máximo nas entradas	$\begin{bmatrix} 12 & 16 & 8 \end{bmatrix}$
$u_{\min}$	Limite mínimo nas entradas	$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 4 \end{bmatrix}$
Q	Matriz de ponderação nas saídas	$\text{diag}(1, 4, 7)$
R	Matriz de supressão nas entradas	$\text{diag}(1, 1, 1)$

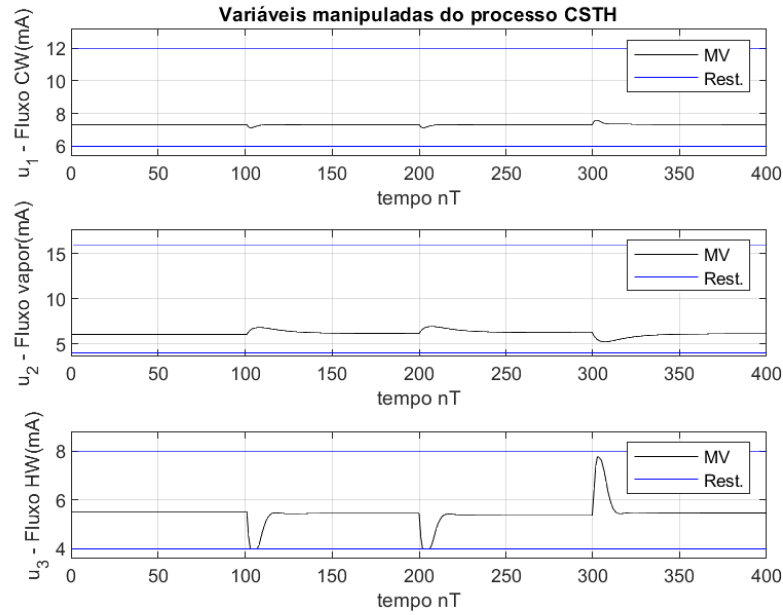
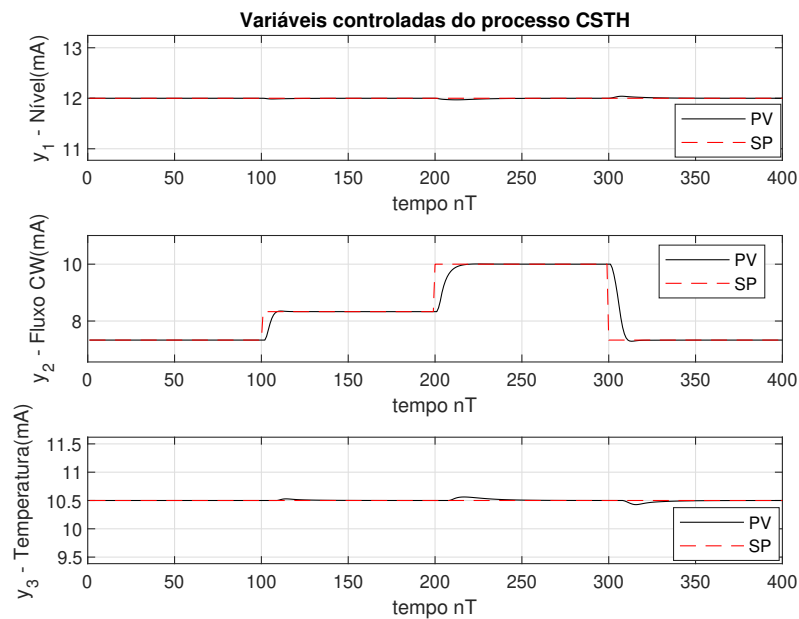
6.2 Simulação do MPC Aplicado ao CSTH

Na simulação referente ao teste de controle de nível, a referência dessa variável foi alterada de 12,0 para 10,5 mA no tempo 100 nT, em seguida para 9,0 mA no tempo 200 nT e, por fim, no tempo 300 nT o valor da referência foi alterado para 11,0 mA, conforme apresentado na Figura 5. Verifica-se que a variável de nível demonstrou uma resposta coerente em relação à variação de *setpoint*. Essa capacidade de seguir a referência estabelecida indica uma sintonia adequada do MPC em relação ao nível do processo. Com a redução do nível no tanque, uma quantidade menor de água entra no processo, logo ocorrerá um distúrbio na vazão de entrada, como comprovado pela análise da Figura 5, de forma simultânea ocorrerá uma redução da temperatura. Já quando a referência do nível aumenta, a vazão de entrada e a temperatura também aumentam. Contudo, esses distúrbios gerados nas variáveis vazão de água fria e temperatura foram mitigados de maneira eficiente pelo MPC, indicando assim uma adaptação robusta do sistema para lidar com perturbações externas. Por fim, nota-se que não há erro de estado estacionário entre as variáveis controladas (PV) e suas referências (SP).

Figura 5 – Resposta do MPC ao teste de *setpoint* da variável nível.



Na Figura 6 é possível observar o comportamento das variáveis manipuladas (MV) da planta CSH quanto ao teste de controle da variável nível apresentado na Figura 5. Nota-se que com a diminuição do nível, uma quantidade menor de água fria e principalmente água quente entram no processo, sendo possível observar o fechamento da válvula de água quente como mostrado na Figura 6. Além disso, para manter a temperatura na referência desejada tendo em vista uma menor vazão de água quente e de água fria entrando no tanque, ocorrerá um aumento na vazão de vapor no processo. Por outro lado, o aumento da

Figura 6 – Respostas das variáveis manipuladas ao teste de *setpoint* da variável nível.Figura 7 – Resposta do MPC ao teste de *setpoint* da variável controlada vazão de água fria.

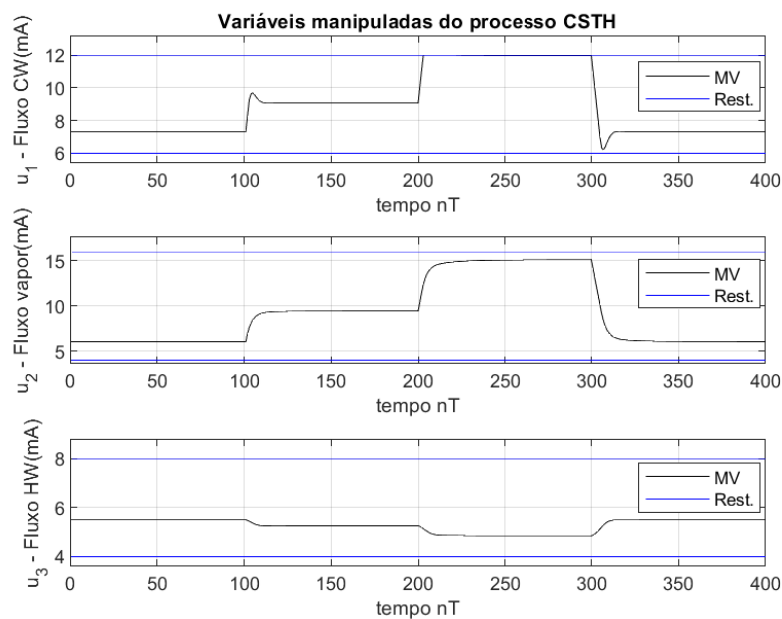
referência do nível gera aumento da vazão de água quente e de água fria, além da redução da vazão de vapor fornecidas ao processo.

Em relação ao controle da vazão de água fria, verifica-se na Figura 7 o teste de *setpoint* no qual no tempo 100 nT o valor de referência dessa variável foi aumentado de 7,330 para 8,330 mA, em seguida para 10,0 mA no tempo 200 nT e, por último, retornou ao valor de referência 7,330 mA no tempo 300 nT. É possível verificar a partir da análise da

Figura 7 que a variável controlada vazão de água fria demonstrou uma resposta coerente ao passar pelo teste de *setpoint*. Isso mostra que a sintonia do MPC é adequada ao controle da vazão de água fria seguir a referência de saída desejada. Observa-se que, com o aumento da vazão de água fria, aumenta-se a quantidade de água que entra no tanque e, por conseguinte, ocorrerá de forma concomitante um ligeiro distúrbio no nível e um pequeno aumento da temperatura do processo, enquanto a redução da referência vazão de água fria acarretará um ligeiro aumento do nível no tanque e diminuição da temperatura. Nota-se que os distúrbios gerados pela vazão de água fria nas variáveis nível e temperatura à mudanças de referência foram eliminados pelo MPC de maneira eficiente, demonstrando, assim, uma adaptação robusta do sistema ao lidar com perturbações externas. Por fim, analogamente ao teste de *setpoint* da variável nível, observa-se também que não há erro de estado estacionário entre as variáveis controladas (PV) e suas referências (SP).

Pode-se observar na Figura 8 como as variáveis manipuladas (MV) responderam ao sistema quanto às variações no *setpoint* da vazão de água fria apresentado na Figura 7. Com o aumento da entrada de água fria no tanque, simultaneamente ocorrerá um aumento na vazão de vapor e diminuição na vazão de água quente a fim de que o otimizador mantenha a temperatura do processo no valor de referência desejado. Observa-se também que, ao aumentar a referência da PV vazão de água fria, a variável manipulada vazão de água fria na Figura 8 não viola o limite máximo de restrição de 12,0 mA imposto na entrada dessa MV. Entretanto, a redução da referência da PV vazão de água fria gera nas MVs diminuição da vazão de água fria e de vapor e aumento da vazão de água quente.

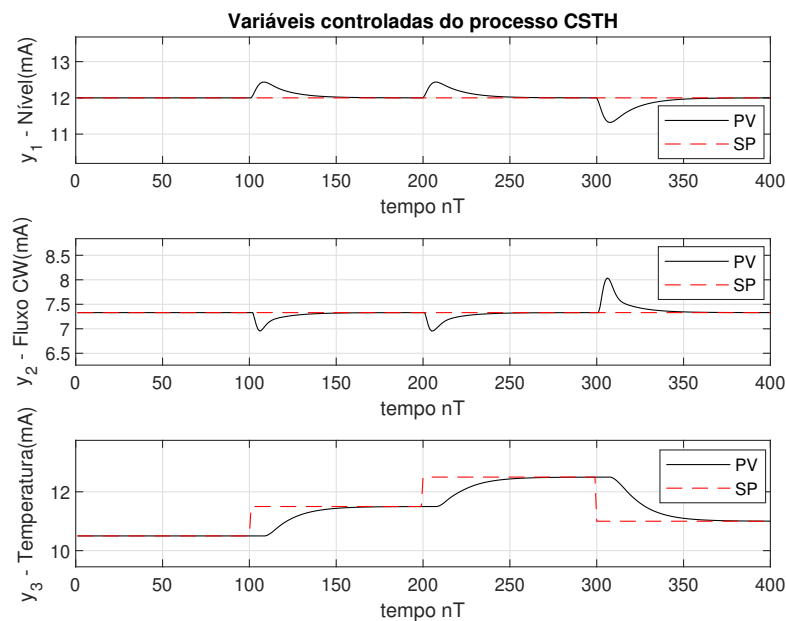
Figura 8 – Respostas das variáveis manipuladas ao teste de *setpoint* da variável controlada vazão de água fria.



Já na simulação do teste de *setpoint* do controle de temperatura, como mostrado na

Figura 9, inicialmente alterou-se no tempo 100 nT o valor de referência dessa variável de 10,5 para 11,5 mA, em seguida, no tempo 200 nT, variou-se o *setpoint* de 11,5 para 12,5 mA e, por fim, no tempo 300 nT, a referência foi alterada para 11,0 mA. Da análise da Figura 9 pode-se verificar que o MPC obteve um ótimo desempenho à variação de referência dos valores na saída, mesmo com o atraso de 8,0 s nessa variável do processo. A capacidade da saída controlada de seguir a referência mostra a robustez do controlador e que a sintonia está de condizente ao controle da variável temperatura do processo. Nota-se que ao aumentar a referência da temperatura no processo simultaneamente ocorrerá aumento do nível e redução na entrada de água fria no tanque, enquanto a redução da referência para essa variável controlada implicará na redução do nível e aumento na entrada de água fria no processo. Pela análise da Figura 9 é possível observar que os distúrbios gerados pelas variações das referências na variável temperatura nas variáveis nível e fluxo de água fria foram eliminados de forma satisfatória pelo MPC, indicando uma adaptação robusta do sistema ao rejeitar perturbações. Novamente, observa-se que não há erro de estado estacionário entre as variáveis controladas (PV) e suas referências ao variar a referência da variável temperatura.

Figura 9 – Resposta do MPC ao teste de *setpoint* da variável temperatura.



O teste de controle de temperatura no qual variou-se a referência desta PV apresentado na Figura 9 levou a respostas do MPC nas variáveis manipuladas (MV) conforme mostrado na Figura 10. Com o aumento do *setpoint* da temperatura, ocorrerá de forma simultânea redução do fluxo de água fria que entra no processo e aumento nos fluxos de vapor e água quente, enquanto com a redução da referência de temperatura será fornecida ao tanque mais água fria e menos água quente, sendo que o fluxo de vapor também

fornecido para o aquecimento do processo será reduzido. Nota-se ao analisar a Figura 10 que o fluxo de vapor não violou as restrições impostas na entrada.

Figura 10 – Respostas das variáveis manipuladas ao teste de *setpoint* da variável temperatura.

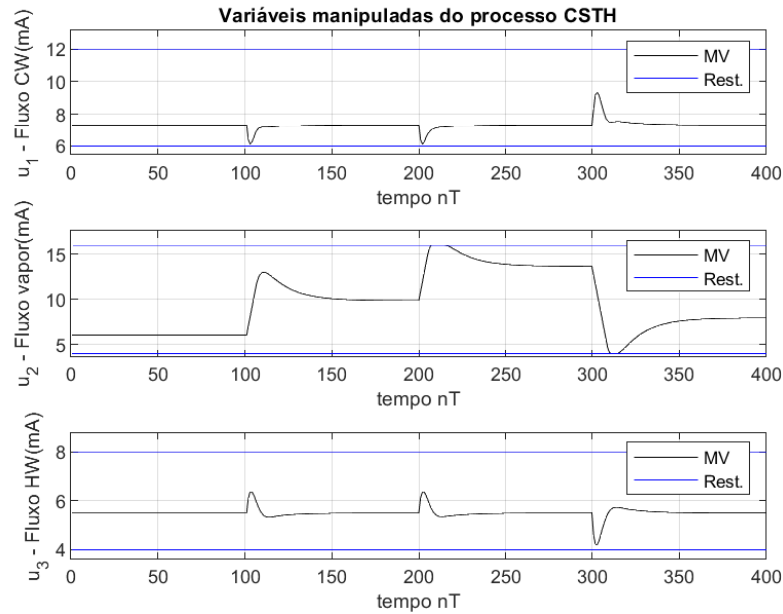
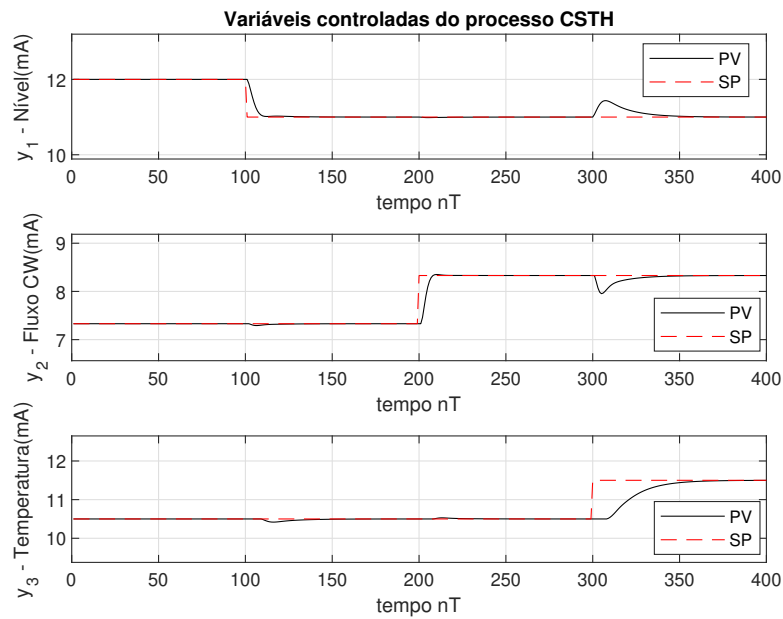


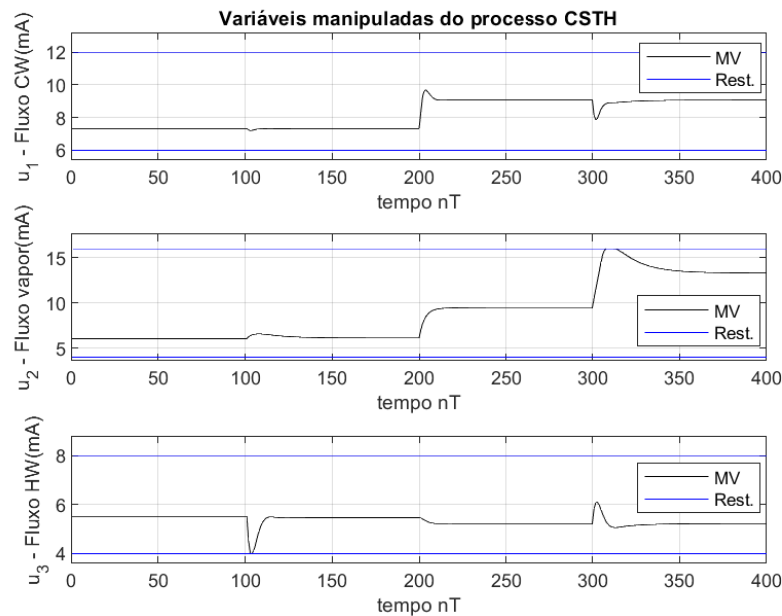
Figura 11 – Resposta do MPC ao teste de *setpoint* das variáveis controladas em instantes de tempo distintos no horizonte de simulação.



Como mostrado na Figura 11, realizou-se testes de variação de *setpoint* nas três variáveis controladas em instantes de tempo distintos no horizonte de simulação do modelo, isto é, no tempo 100 nT a referência da variável nível foi alterada de 12,0 para 11,0 mA,

em seguida, no tempo 200 nT, a referência da variável fluxo de água fria foi alterada de 7,330 para 8,330 mA e, por fim, o valor de referência da variável temperatura foi alterado de 10,50 para 11,50 mA no tempo 300 nT. É possível observar que todas as variáveis controladas apresentaram respostas satisfatórias ao seguirem as referências estabelecidas no teste de *setpoint*, indicando assim uma sintonia adequada do MPC aplicado à planta CSTH. As perturbações causadas nas PVs vazão de água fria e temperatura ao reduzir a referência para o nível do tanque e as geradas pela vazão de água fria no nível e na temperatura foram rejeitadas pelo controlador preditivo de forma eficiente. Observa-se também que o aumento da temperatura acarretará aumento do nível e redução na vazão de água fria que entra no tanque, mas essas perturbações também foram rejeitadas pelo MPC de maneira satisfatória, indicando uma adaptação robusta do sistema ao rejeitar perturbações externas. Nota-se, também, que não há erro de estado estacionário entre as variáveis controladas (PV) e seus respectivos valores de referência (SP).

Figura 12 – Resposta das variáveis manipuladas do processo à variação de referência das variáveis controladas em instantes de tempo distintos no horizonte de simulação.



A resposta das variáveis manipuladas (MVs) às variações de *setpoint* nas variáveis controladas nível, vazão de água fria e temperatura do processo como apresentado na Figura 11 considerando instantes de tempo distintos no horizonte de simulação está apresentada na Figura 12. Nota-se, ao analisar esta figura, que ao reduzir a referência do nível no tempo 100 nT ocorrerá redução nas MVs vazão de água quente e vazão de água fria fornecidas ao tanque e aumento da vazão de vapor. Já com o aumento da referência vazão de água fria, ocorrerá aumento nas MVs vazão de água fria e vazão vapor, enquanto a vazão de água quente será reduzida. Por fim, o aumento do *setpoint* temperatura acarretará aumento na

quantidade de água quente que entra no tanque e vazão de vapor fornecida ao processo, enquanto ocorrerá uma diminuição na vazão de água fria. Observa-se ainda na Figura 12 que a **MV** vazão de vapor obedeceu o limite máximo de restrição de 15,0 mA imposto nessa entrada.

Figura 13 – Erro de estado estacionário da variável controlada vazão de água fria.

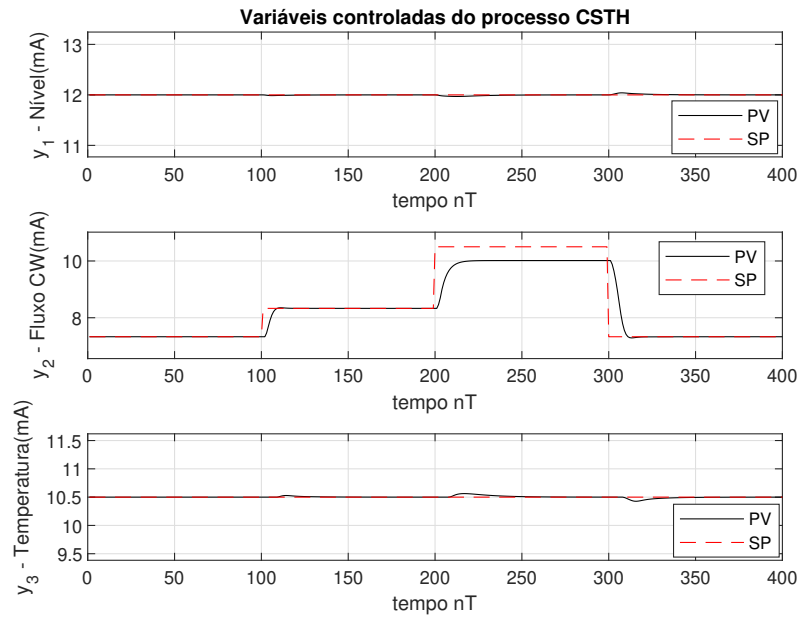
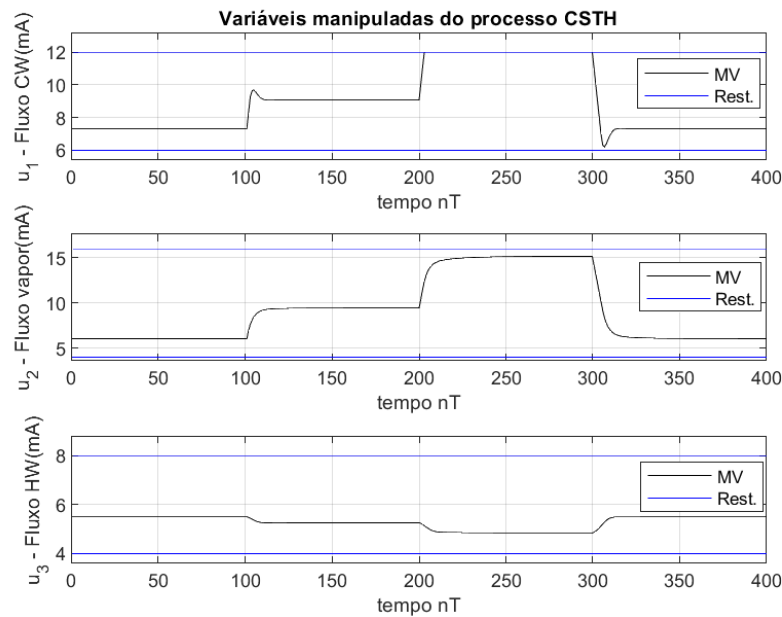


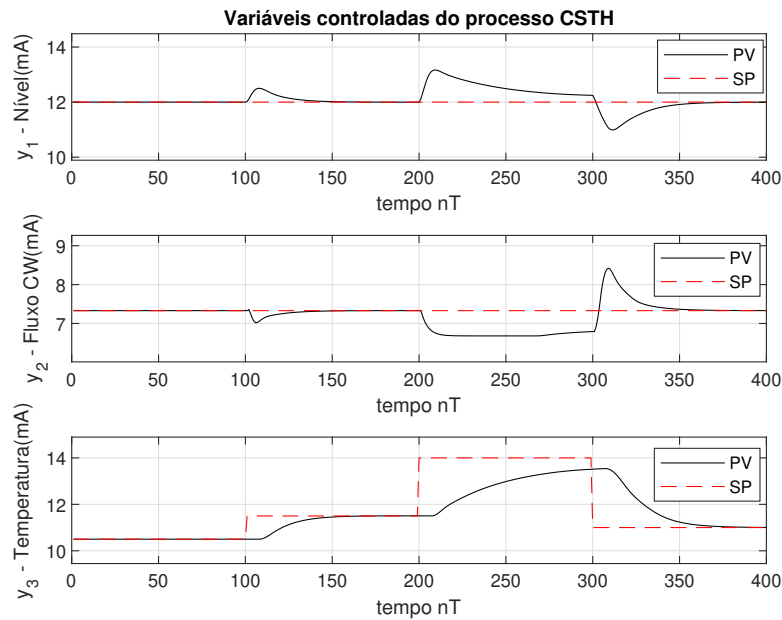
Figura 14 – Comportamento das variáveis manipuladas ao teste de *setpoint* da variável controlada vazão de água fria quanto ao erro de estado estacionário.



Na Figura 13 simulou-se o teste de controle vazão de água fria no qual no tempo 200 nT alterou-se o valor de referência de 8,330 para 10,5 mA nessa variável. Da análise

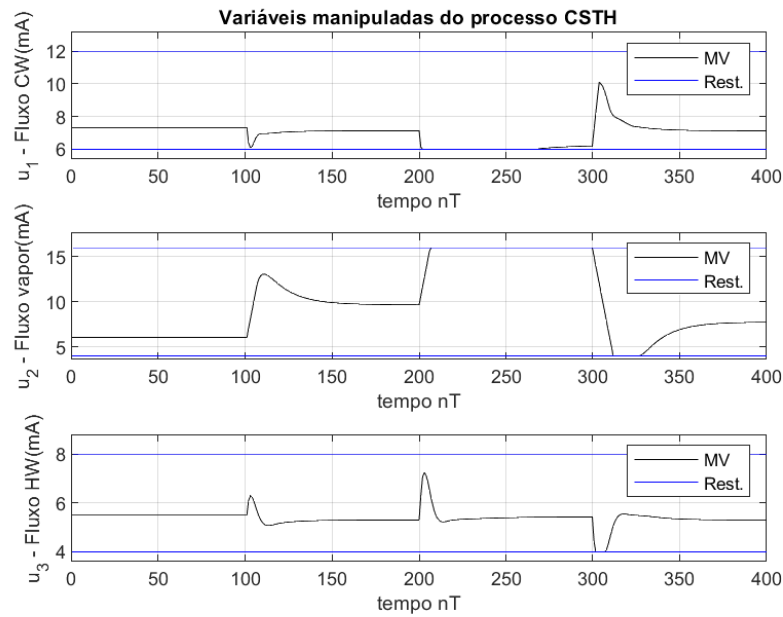
da Figura 13 observa-se que há erro de estado estacionário entre a variável controlada (PV) e a referência (SP). Esse comportamento indesejado ocorreu porque o MPC não violou o limite de restrição máximo imposto na variável manipulada vazão de água fria do processo, isto é, neste caso o MPC restringiu a MV vazão de água fria no limite máximo da restrição de 12,00 mA imposto na entrada como mostrado na Figura 14. Diferentemente do controlador PID, que trabalha através da reação ao erro, e com controlador individual e específico para cada variável controlada, o MPC calcula todas as ações de controle no mesmo instante de amostragem. Além disso, outra vantagem do controle preditivo é a sua capacidade de obedecer as restrições impostas nas entradas do processo.

Figura 15 – Erro de estado estacionário nas variáveis controladas ao variar a referência da variável temperatura.



Já na Figura 15 realizou-se o teste de *setpoint* no qual simulou-se o controle de temperatura onde no tempo 200 nT no horizonte de simulação alterou-se a referência dessa variável controlada (PV) de 11,5 para 14,0 mA. Objetivou-se nesta simulação verificar, como nos testes de *setpoints* anteriores das variáveis controladas, o desempenho do MPC aplicado ao processo CSTH. Ao analisar a Figura 15 é possível observar que há erro de estado estacionário nas variáveis nível, vazão de água fria e temperatura. Neste caso, o controlador não conduziu as variáveis controladas (PVs) aos respectivos valores de referência no intervalo entre 200 e 300 nT do horizonte de simulação. Tal comportamento indesejado decorreu porque, como apresentado na Figura 16, o MPC restringiu as variáveis manipuladas do processo (MVs) vazão de água fria, vazão de vapor e vazão de água quente aos seus respectivos limites de restrição mínimos e máximos. É possível observar também na Figura 15 que ao variar a referência da variável temperatura nos instantes de tempo 100 e 300 nT o controlador conduziu as variáveis controladas aos seus respectivos *setpoints*

Figura 16 – Comportamento das variáveis manipuladas ao teste de *setpoint* da variável controlada temperatura quanto ao erro de estado estacionário.



de maneira satisfatória, indicando uma sintonia adequada do MPC aplicado no controle do processo.

7 CONCLUSÕES

O presente trabalho teve como objetivo a modelagem da estratégia de controle preditivo discreto em modelo de espaço de estados posicional e incremental para sistemas com entrada e saída únicas e multivariável. Abordou-se o problema de otimização com a função custo sujeita às restrições do processo.

Com base na modelagem do controle preditivo desenvolveu-se no ambiente de simulação numérica MATLAB[®] um controlador em modelo de espaço de estados discreto incremental multivariável sujeito a restrições nas entradas. Empregou-se o MPC ao controle da planta Tanque Aquecedor Agitado Contínuo (CSTH) do estudo de caso. Nas simulações, considerou-se o modelo linear do processo CSTH representado em função de transferência do ponto de operação 2 de três entradas e três saídas.

A partir dos testes de controle ao variar as referências das variáveis nível, vazão de água fria e temperatura verificou-se uma resposta coerente quanto ao segmento de *setpoint* das saídas do sistema e uma sintonia adequada do MPC em relação ao controle das variáveis controladas do processo CSTH. Além disso, os distúrbios gerados nas variáveis controladas foram eliminados pelo MPC de maneira eficiente, indicando uma adaptação robusta do sistema quanto à rejeição de perturbações externas.

Pode-se observar também nos testes de *setpoint* erro de estado estacionário entre as variáveis controladas (PV) e seus respectivos valores de referência (SP). Esse comportamento indesejado resultou do sistema não atender as especificações nas saídas porque o MPC obedeceu e limitou as variáveis manipuladas (MVs) aos limites de restrição mínimos e máximos impostos nas entradas da planta. Verificou-se também que atribuir peso à determinada variável controlada na matriz de ponderação faz com que o algoritmo MPC priorize o controle de tal variável do sistema em detrimento das demais.

Como perspectivas para trabalhos futuros recomenda-se o estudo e implementação de um controlador PID num ambiente de simulação numérica aplicado ao processo CSTH do estudo de caso a fim de verificar e comparar o desempenho daquele controlador no processo com o do MPC apresentado neste trabalho.

REFERÊNCIAS

BALAJI, D. V.; MAHESWARI, E. Model predictive control techniques for cstr using matlab. *International Journal of Electrical Engineering & Technology (IJEET)*, v. 3, n. 3, p. 121–129, 2012. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/306014810-MODEL_PREDICTIVE_CONTROL_TECHNIQUES_FOR_CSTR_USING_MATLAB>. Citado na página 21.

CAMACHO, E. F.; ALBA, C. B. *Model predictive control*. [S.l.]: Springer science & business media, 1995. Citado 6 vezes nas páginas 17, 24, 25, 26, 27 e 29.

CLARKE, D. W.; MOHTADI, C.; TUFFS, P. S. Generalized predictive control—part i. the basic algorithm. *Automatica*, Pergamon, v. 23, p. 137–148, 3 1987. ISSN 0005-1098. Citado na página 17.

CLARKE, D. W.; MOHTADI, C.; TUFFS, P. S. Generalized predictive control—part ii extensions and interpretations. *Automatica*, Pergamon, v. 23, p. 149–160, 3 1987. ISSN 0005-1098. Citado na página 17.

CUTLER, C. R.; RAMAKER, B. L. Dynamic matrix control: A computer control algorithm. *Joint Automatic Control Conference*, v. 17, p. 72, 1980. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 20.

ESCOBAR, M. de S. *Monitoração de desempenho de controladores preditivos*. Monografia (Graduação em Engenharia Química) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010. Disponível em: <<https://lume.ufrgs.br/handle/10183/35199>>. Citado 3 vezes nas páginas 16, 24 e 25.

GESSER, R. da S. *Simulador de Processos e Controle Preditivo para a Indústria de Petróleo e Gás*. Monografia (Graduação em Engenharia de Controle e Automação) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Florianópolis, 2016. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/171620>>. Citado na página 16.

KEYSER, R. M. D.; CAUWENBERGHE, A. R. V. Extended prediction self-adaptive control. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, v. 18, p. 1255–1260, 7 1985. ISSN 1474-6670. Citado na página 17.

KVASNICA, M. et al. Model predictive control of a cstr: A hybrid modeling approach. *Chemical Papers*, De Gruyter, v. 64, p. 301–309, 6 2010. ISSN 03666352. Disponível em: <<https://www.degruyter.com/document/doi/10.2478/s11696-010-0008-8/html>>. Citado na página 21.

LI, S.; ZONG, X. J.; HU, Y. Model predictive control of continuous stirred-tank reactor. *Advanced Materials Research*, Trans Tech Publications Ltd, v. 760-762, p. 1000–1003, 2013. ISSN 1662-8985. Disponível em: <<https://www.scientific.net/AMR.760-762.1000>>. Citado na página 22.

LIMA, D. M. *Sistema embarcado de controle preditivo para processos industriais*. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Automação e Sistemas) — Universidade Federal

de Santa Catarina, Florianópolis, 2013. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/106987>>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 36.

MACIEJOWSKI, J. Predictive Control: With Constraints. [S.l.]: Prentice Hall, 2002. ISBN 9780201398236. Citado na página 16.

PIPINO, H. A.; CAPPELLETTI, C. A.; ADAM, E. J. Adaptive multi-model predictive control applied to continuous stirred tank reactor. Computers & Chemical Engineering, v. 145, p. 107195, 2021. ISSN 0098-1354. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0098135420312382>>. Citado na página 23.

PLUCENIO, A. et al. A practical approach to predictive control for nonlinear processes. IFAC Proceedings Volumes, Elsevier, v. 40, p. 210–215, 1 2007. ISSN 1474-6670. Citado na página 18.

QIN, S. J.; BADGWELL, T. A. A survey of industrial model predictive control technology. Control Engineering Practice, Pergamon, v. 11, p. 733–764, 7 2003. ISSN 0967-0661. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0967066102001867>>. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 24.

RATNAKUMARI, U. V.; TRIVEN, M. B. Implementation of adaptive model predictive controller and model predictive control for temperature regulation and concentration tracking of cstr. Proceedings of the International Conference on Communication and Electronics Systems, ICCES 2016, Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., p. 1–6, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/CESYS.2016.7889843>>. Citado na página 22.

RICHALET, J. et al. Model predictive heuristic control: Applications to industrial processes. Automatica, Pergamon, v. 14, p. 413–428, 9 1978. ISSN 0005-1098. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 20.

RIDWAN, A. R.; AZAD, I. I.; BONY, M. I. S. A simulink modeling to develop a control system of stirred tank heater with multifarious operating conditions. International Journal of Computer Applications, Foundation of Computer Science, v. 57, n. 21, 11 2012. Disponível em: <https://www.academia.edu/80257948/A_Simulink_Modeling_to_Develop_a_Control_System_of_Stirred_Tank_Heater_with_Multifarious_Operating_Conditions>. Citado na página 21.

ROSSITER, J. A. Model-based predictive control: a practical approach. [S.l.]: CRC Press, 2003. ISBN 978-0849312915. Citado 3 vezes nas páginas 18, 26 e 27.

SCHWENZER, M. et al. Review on model predictive control: an engineering perspective. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology 2021 117:5, Springer, v. 117, p. 1327–1349, 8 2021. ISSN 1433-3015. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/s00170-021-07682-3>>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 20.

SOETERBOEK, R. Predictive control: a unified approach. [S.l.]: Prentice-Hall, Inc., 1992. Citado na página 17.

THAMMINAIDU, V.; SHIHABUDHEEN, K. V. Model predictive control (mpc) of system identified continuous stirred tank reactor (cstr) with constraints. 2021 IEEE 6th International Conference on Computing, Communication and Automation, ICCCA 2021, Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., p. 195–201, 2021. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/9666313>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 23.

THORNHILL, N. F.; PATWARDHAN, S. C.; SHAH, S. L. A continuous stirred tank heater simulation model with applications. Journal of Process Control, Elsevier, v. 18, p. 347–360, 3 2008. ISSN 0959-1524. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2007.07.006>. Citado 5 vezes nas páginas 58, 59, 60, 61 e 62.

WANG, L. Model predictive control system design and implementation using matlab®. Model Predictive Control System Design and Implementation Using MATLAB®, Springer London, 2009. ISSN 1430-9491. Citado na página 24.

YDSTIE, B. E. Extended horizon adaptive control. IFAC Proceedings Volumes, Elsevier, v. 17, p. 911–915, 7 1984. ISSN 1474-6670. Citado na página 17.

ZHANG, R.; XUE, A.; GAO, F. Model predictive control: Approaches based on the extended state space model and extended non-minimal state space model. Model Predictive Control: Approaches Based on the Extended State Space Model and Extended Non-minimal State Space Model, Springer Singapore, p. 1–137, 8 2018. Citado na página 18.

ANEXO A – CÓDIGO PRINCIPAL

Código A.1 – Código principal MPC baseado no modelo de espaço de estados incremental multivariável com o modelo linear em função de transferência do ponto de operação 2 do processo CSTH e parâmetros de sintonia.

```

1 % Control of a distillation column subsystem (Alvarez et al, 2009) with MPC
2 % based on state-space model in the incremental form
3 clear
4 close all
5 clc
6 tic
7 s = tf('s'); % defining the Laplace's variables
8 Ts = 1 ; % sampling time [=] min
9
10 % Nominal model (used by MPC)
11 g11 = (4.2474*10^-3)/((s+3.731*10^-3)*(s+2.632*10^-1));
12 g21 = (1.5132*10^-1)/(s+2.632*10^-1);
13 g31 = (-3.1466*10^-3)/((s+2.732*10^-2)*(s+2.632*10^-1));
14
15 g32 = (7.1849*10^-3)/(s+2.732*10^-2);
16
17 g13 = (1.1540*10^-1)/(s+3.731*10^-3);
18 g33 = (1.4683*10^-2)/(s+2.732*10^-2);
19
20 g = [g11 0 g13; g21 0 0; g31 g32 g33]; % transfer function matrix
21
22 % WARNING (dimension)
23 io = [1 0 0; 1 0 0; 9 8 8]; % time delays associated with transfer function matrix
24
25 [ny,nu] = size(g);
26 gd = c2d(g,Ts,'zoh');
27
28 for i = 1:ny
29     for j = 1:nu
30         [num,den]=tfdata(gd(i,j),'v');
31         delay = io(i,j);
32         gd(i,j) = tf([zeros(1,delay/Ts) num],[den zeros(1,delay/Ts)],Ts);
33     end
34 end
35
36 [Atil,Btil,Ctil,Dtil] = ssdata(gd); % Atil(25x25), Btil(25x2), Ctil(3x25)
37 [A,B,C]=immpc(Atil,Btil,Ctil); % A(27x27), B(27x2), C(3x27)
38 % sysd = ss(Atil,Btil,Ctil,Dtil,Ts); % It is always necessary specify time
    sampling when discrete systems are considered here

```



```

39 % figure(1); step(sysd,80)
40 % hold on ; step(g,80)
41 % grid on
42
43 % Plant model
44 % Transfer Function Plant Model
45 % g11 = (4.2474*10^-3)/((s+3.731*10^-3)*(s+2.632*10^-1));
46 % g21 = (1.5132*10^-1)/(s+2.632*10^-1);
47 % g31 = (-3.1466*10^-3)/((s+2.732*10^-2)*(s+2.632*10^-1));
48
49 % g32 = (7.1849*10^-3)/(s+2.732*10^-2);
50
51 % g13 = (1.1540*10^-1)/(s+3.731*10^-3);
52 % g33 = (1.4683*10^-2)/(s+2.732*10^-2);
53
54 % gp = [g11 0 g13; g21 0 0; g31 g32 g33];
55 gp = g;
56 io = [1 0 0; 1 0 0; 9 8 8]; % Atraso Ponto de Operação 2
57
58 [ny,nu] = size(gp);
59 gpd = c2d(gp,Ts,'zoh');
60
61 for i = 1:ny
62     for j = 1:nu
63         [num,den]=tfdata(gpd(i,j),'v');
64         delay = io(i,j);
65         gpd(i,j) = tf([zeros(1,delay/Ts) num],[den zeros(1,delay/Ts)],Ts);
66     end
67 end
68
69 [Atilp,Btilp,Ctilp,Dtilp] = ssdata(gpd);
70 [Ap,Bp,Cp]=immmpc(Atilp,Btilp,Ctilp);
71 % sysdp = ss(Atilp,Btilp,Ctilp,Dtilp,Ts); % It is always necessary specify time
       sampling when discrete systems are considered here
72 % figure(2); step(sysdp,80)
73 % hold on ; step(gp,80)
74 % grid on
75
76 % Updating the dimensions of variables
77 nu=size(g,2); % Number of manipulated inputs
78 ny=size(g,1); % Number of controlled outputs
79 nx=size(A,1); % Number of system states
80
81 % Tuning parameters of MPC
82 p=120; % Output prediction horizon (Horizonte de predição - N)
83 p=50;
84 m=3; % Input horizon (Horizonte de controle - M)

```

```

85 % nsim=250;          % Simulation time in sampling periods
86 nsim = 400; % Teste de SP PVs
87
88 % Teste de controle SP Variaveis Controladas (PV)
89 q=[1,4,7]; % Output weights q(1 x ny)
90 % ys=[(level sp/mA) (flow CW sp/mA) (temp. sp/mA)]'
91 r=[1,1,1]; % Input weights r(1 x nu)
92
93 % ENTRADAS MANIPULADAS u = [u1 u2 u3]'
94 % u1 = [4 - 20] mA - Flow CW
95 % u2 = [4 - 20] mA - Steam valve
96 % u3 = [4 - 12] mA - HW valve
97 % umax=[11,16,8]';
98 % umax=[12,17,8]';
99 % u=[(Flow CW) (Flow Steam) (Flow HW)]
100 umax=[12,16,8]'; % umax(nu x 1) 12,15,8
101 umin=[6,4,4]'; % umin(nu x 1)
102 dumax=[1,1,1]'; % dumax(nu x 1) Utilizado no teste de SP das PVs
103 % dumax=.3*[1,1,1]';
104
105 % WARNING
106 % Characteristics of process - Ponto de Operação 2
107 % uss - Estado estacionário nas entradas manipuladas
108 %      [Flow de CW, Flow Steam, Flow HW]' mA
109 % yss - Estado estacionário nas saídas controladas
110 %      [(Level sp/mA), (Flow CW sp/mA), (temp. sp/mA)]' mA
111 % yss = ys; % Set-point of the outputs
112 uss = [7.330 6.053 5.500]'; % uss(nu x 1) parâmetros usados no teste de SP
113 yss = [12.0 7.330 10.50]'; % yss(ny x 1) parâmetros usados no teste de SP
114
115 % Defining the initial conditions (deviation variables)
116 xmk=zeros(nx,1); % (nx x 1) It starts the steady-state
117 xpk=xmk; % (nx x 1)
118 ypk=Cp*xpk; % (ny x 1)
119 uk_1=uss-uss; % uk_1,uss(nu x 1)
120
121 % State observer
122 Kf = FKalman(ny,A,C,100);
123
124 % Starting simulation
125 ysp=[];
126 for in=1:nsim
127     uk(:,in)=uk_1+uss; % uk,uk_1,uss(nu x 1)
128     yk(:,in)=ypk+yss; % yk,ypk,yss(ny x 1)
129
130     % TESTE SP PVs
131     % ys(ny x 1) - Set-point of the outputs

```

```

132 % ys = [(level sp/mA), (flow CW/mA), (temp. sp/mA)]; % Set-point of the
    outputs
133 if in <= 100
134     ys = yss; % Set-point of the outputs
135 elseif in < 200
136 %     ys = [11.0 7.330 10.50]'; % Set-point of the outputs
137 %     ys = [10.5 7.330 10.50]'; % Level
138 %     ys = [12.0 8.330 10.50]'; % Flow CW
139     ys = [12.0 7.330 11.5]'; % Temperature
140 elseif in < 300
141 %     ys = [11.0 8.330 10.50]';
142 %     ys = [9.0 7.330 10.50]'; % Level
143 %     ys = [12.0 10.0 10.50]'; % Flow CW 10.5 (ERRO SS)
144 %     Erro SS Flow CW
145 %     ys = [12.0 10.5 10.50]';
146 %     ys = [12.0 7.330 12.5]'; % Temperature 13
147 %     Erro SS Temperature
148     ys = [12.0 7.330 14.0]';
149 elseif in < 400
150 %     ys = [11.0 8.330 11.50]';
151 %     ys = [11.0 7.330 10.50]'; % Level
152 %     ys = [12.0 7.330 10.50]'; % Flow CW
153     ys = [12.0 7.330 11.0]'; % Temperature
154 end
155
156 % q(1 x ny), r(1 x nu)
157 % umax,umin,dumax,uss,uk_1(nu x 1)
158 % ys, yss(ny x 1)
159 [dukk,Vk]=issmpc(p,m,nu,ny,q,r,A,B,C,umax-uss,umin-uss,dumax,ys-yss,uk_1,xmk);
160 duk=dukk(1:nu); % receding horizon
161 Jk(in)=Vk; % control cost
162
163 % Correction of the last control input
164 xmk=A*xmk+B*duk;
165 ymk=C*xmk;
166 if in==100
167     % xpk=Ap*xpk+Bp*(duk+0.2*[1 1]'); % inserting unmeasured disturbance into
    plant
168     xpk=Ap*xpk+Bp*(duk+0.2*[1 1 1]');
169 %     xpk=Ap*xpk+Bp*duk;
170     ypk=Cp*xpk; % plant measurement
171 else
172     xpk=Ap*xpk+Bp*duk;
173     ypk=Cp*xpk; % plant measurement
174 end
175
176 %Correction of the last measurement

```

```

177 de=yk-ymk;
178 xmk=xmk+Kf*de;
179 uk_1=duk+uk_1;
180 ysp=[ysp ys];
181 % uk=uk_1+duk;
182 end
183
184 nc=size(yk,1);
185 figure(1)
186 yrot = ["y_1 - Nível(mA)" "y_2 - Fluxo CW(mA)" "y_3 - Temperatura(mA)"]';
187 for j=1:nc
188     subplot(nc,1,j)
189     plot(yk(j,:), 'k-')
190     hold on
191     plot(ysp(j,:), 'r--')
192     xlabel('tempo nT')
193     in = num2str(j);
194 %     yrot = ['y_' in];
195     if j == 1
196         title('Variáveis controladas do processo CSTH')
197     end
198     ylabel(yrot(j))
199     ylim([0.9*min(yk(j,:)) 1.1*max(yk(j,:))]);
200     grid on
201     legend('PV', 'SP')
202 end
203 % legend('PV', 'set-point')
204 % saveas(gcf, 'one_y.pdf') % imprime a figura
205
206 nc=size(uk,1);
207 figure(2)
208 yrot = ["u_1 - Fluxo CW(mA)" "u_2 - Fluxo vapor(mA)" "u_3 - Fluxo HW(mA)"]';
209 % title('Entradas manipuladas')
210 for j=1:nc
211     subplot(nc,1,j)
212     plot(uk(j,:), 'k-')
213     hold on
214     plot(umax(j)*ones(length(uk)), 'b-')
215     hold on
216     plot(umin(j)*ones(length(uk)), 'b-')
217     hold on
218     xlabel('tempo nT')
219     in = num2str(j);
220 %     yrot = ['u_' in];
221     if j == 1
222         title('Variáveis manipuladas do processo CSTH')
223     end

```

```

224     ylabel(yrot(j))
225     ylim([0.9*min(umin(j,:)) 1.1*max(umax(j,:))]);
226     grid on
227     legend('MV','Rest.')
228 end
229 % saveas(gcf,'one_x.pdf') % imprime a figura
230
231 figure(3)
232 plot(Jk)
233 xlabel('tempo nT')
234 ylabel('Cost function')
235 grid on
236
237 % data print
238 % =====
239 % outputs
240 % =====
241 y1 = [1:nsim;yk(1,:)];
242 y2 = [1:nsim;yk(2,:)];
243 y3 = [1:nsim;yk(3,:)];
244 ysp1 = [1:nsim;ysp(1,:)];
245 ysp2 = [1:nsim;ysp(2,:)];
246 ysp3 = [1:nsim;ysp(3,:)];
247
248 [fid,msg] = fopen('y1.dat','w');
249 fprintf(fid, '%6.3f %6.3f\n',y1)
250 status = fclose(fid);
251
252 [fid,msg] = fopen('y2.dat','w');
253 fprintf(fid, '%6.3f %6.3f\n',y2)
254 status = fclose(fid);
255
256 [fid,msg] = fopen('y3.dat','w');
257 fprintf(fid, '%6.3f %6.3f\n',y3)
258 status = fclose(fid);
259
260 [fid,msg] = fopen('ysp1.dat','w');
261 fprintf(fid, '%6.3f %6.3f\n',ysp1)
262 status = fclose(fid);
263
264 [fid,msg] = fopen('ysp2.dat','w');
265 fprintf(fid, '%6.3f %6.3f\n',ysp2)
266 status = fclose(fid);
267
268 [fid,msg] = fopen('ysp3.dat','w');
269 fprintf(fid, '%6.3f %6.3f\n',ysp3)
270 status = fclose(fid);

```

```

271 % =====
272
273 % =====
274 % inputs
275 % =====
276 u1 = [1:nsim;uk(1,:)];
277 u2 = [1:nsim;uk(2,:)];
278 u3 = [1:nsim;uk(3,:)];
279
280 [fid,msg] = fopen('u1.dat','w');
281 fprintf(fid, '%6.3f %6.3f\n',u1)
282 status = fclose(fid);
283
284 [fid,msg] = fopen('u2.dat','w');
285 fprintf(fid, '%6.3f %6.3f\n',u2)
286 status = fclose(fid);
287
288 [fid,msg] = fopen('u3.dat','w');
289 fprintf(fid, '%6.3f %6.3f\n',u3)
290 status = fclose(fid);
291 % =====
292
293 % =====
294 % cost
295 % =====
296 % V = [1:nsim;Jk(1,:)];
297 % [fid,msg] = fopen('V.dat','w');
298 % fprintf(fid, '%6.3f %6.3f\n',V)
299 % status = fclose(fid);

```

ANEXO B – CÓDIGO DE SIMULAÇÃO MPC BASEADO NO MODELO DE ESPAÇO DE ESTADOS INCREMENTAL MULTIVARIÁVEL.

Código B.1 – Algoritmo MPC baseado no modelo de espaço de estados para sistemas de malha fechada com restrições na ação e incremento de controle.

```

300 function [duk,Jk]=issmpc(p,m,nu,ny,q,r,A,B,C,umax,umin,dumax,ys,uk_1,xmk)
301
302 % Simulates the closed-loop system with MPC based on state-space model in the
303 % incremental form
304 % Output variables:
305 % duk - system optimal inputs move (dimension: m*nu x 1)
306 % Jk - Control cost (dimension: 1 x 1)
307 % Input variables:
308 % p - Optimization horizon (N - horizonte de predição)
309 % m - Control horizon (M - horizonte de controle)
310 % nu - Number of inputs
311 % ny - Number of outputs
312 % q(1 x ny) - Output weights (dimension: 1 x ny)
313 % r(1 x nu) - Input weights (dimension: 1 x nu)
314 % A,B,C - State, input and output matrices of the state-space model used in the
    MPC controller
315 % umax,umin(nu x 1) - Max and min values for the inputs (dimension: nu x 1)
316 % dumax(nu x 1) - Max input change (dimension: nu x 1)
317 % ys(ny x 1) - Set-points for the outputs (dimension: ny x 1)
318 % uk_1(nu x 1) - Last value of manipulated inputs (dimension: nu x 1)
319 % xmk - current state of system (dimension: nx x 1)
320
321 ysp=[];
322 for i=1:p;
323     ysp=[ysp;ys]; % set-point vector (p.ny x 1)
324 end
325
326 Phi=[]; % Empty variable (different of zero)
327 tha=[]; % Empty variable (different of zero)
328 for k=1:p % Hor. de predição
329
330     Phi=[Phi; C*A^(k)]; % Predições das entradas

```

```

331
332     tha=[tha; C*A^(k-1)*B]; % Predições das saídas
333 end
334
335 a=tha;
336 Dm=a;
337 for iu=1:m-1;
338     a=[zeros(ny,nu);a(1:(p-1)*ny,:)];
339     Dm=[Dm a];
340 end
341 % Matriz H ou G? - Eq. (4.50)
342 Theta=Dm; % dimension p*ny x m*nu (MIMO) (360x6)
343
344 % Matrices Qbar, Mtil, Itil and Rbar
345
346 aux=[];
347 for in=1:p;
348     aux=[aux q]; % Esse q representa Q (elementos da matriz)
349 end
350 % Matriz de ponderação
351 Qbar=diag(aux); % Q(qN x qN) ou (ny. x nu.m)
352
353 clear aux; aux=[];
354
355 % 4.8 - MPC com Restrições - (MIMO)
356 Mtil=[];
357 Itil=[];
358 auxM=zeros(nu,m*nu);
359 for in=1:m;
360     aux=[aux r];
361     auxM=[eye(nu) auxM(:,1:(m-1)*nu)];
362     Mtil=[Mtil;auxM];
363     Itil=[Itil;eye(nu)]; % Ip
364 end
365
366 % Matriz de supressão
367 Rbar=diag(aux); % R(pM x pM) ou (nu.m x nu.m)
368
369 % Hessian Matrix (termo quadrático)
370 H=Theta'*Qbar*Theta+Rbar; % (6x6)
371 H=(H+H')/2;
372
373 %Auxiliary constraint matrix
374 Dumax=dumax;
375 Umax=umax;
376 Umin=umin;
377 for i=1:m-1;

```



```

378 Umax=[Umax;umax]; %
379 Umin=[Umin;umin]; %
380 Dumax=[Dumax;dumax]; %
381 end
382
383 % Parameters of QP
384 el = Phi*xmk-ysp; % (360x3) % erro
385 ct = el'*Qbar*Theta; % (3x6) % termo linear
386 c = (Phi*xmk-ysp)'*Qbar*(Phi*xmk-ysp); % termo independente
387 % c = el'*Qbar*el;
388
389 % Mtil(p.M x p.M) - (p.m x p.m)
390 % Itil(p.M x nu) - (p.m x p)
391 % Ain(2p.M x p.M)
392 % Bin(2p.M x 1)
393 % Inequality constraints Ain*x <= Bin - Eq. (4.139)
394 Ain=[Mtil;-Mtil];
395 Bin=[Umax-Itil*uk_1;Itil*uk_1-Umin];
396 options=optimoptions('quadprog','display','off');
397 % Help quadprog
398 % H(p.M x p.M), cT(1 x pM)
399 dukk=quadprog(H,ct,Ain,Bin,[],[],-Dumax,Dumax,[],options); % optimal solution
400 duk=dukk(1:nu); % receding horizon
401 Jk=dukk'*H*dukk+2*ct*dukk+c; % control cost Eq. (4.69)

```

ANEXO C – CÓDIGO DE SIMULAÇÃO EMPREGADO NO CÁLCULO DAS MATRIZES DE ESPAÇO DE ESTADOS INCREMENTAL $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ E $\tilde{C}$.

Código C.1 – Algoritmo calcula as matrizes do modelo no espaço de estados incremental (aumentado) a partir das matrizes de espaço de estados posicional.

```

403 function [Atil,Btil,Ctil] = immpc(A,B,C)
404 % immpc calculates state-space model in incremental form from positional state-
    space
405 % model for MPC controllers
406 nx = size(A,1); % number of states
407 nu = size(B,2); % number of inputs
408 ny = size(C,1); % number of outputs
409
410 Atil = [A B; zeros(nu,nx) eye(nu)];
411 Btil = [B ; eye(nu)];
412 Ctil = [C zeros(ny,nu)];

```

ANEXO D – CÓDIGO DO ALGORITMO FILTRO DE KALMAN.

Código D.1 – Algoritmo filtro de Kalman.

```
413 function [Kalman] = FKalman(ny,A,C,it)
414
415 V=.5;
416 W=.5;
417 sM=size(A);
418 PP=eye(sM(1));
419 VV=eye(ny)*V;
420 WW=eye(sM(1))*W;
421 for j=1:it
422     PP = A*PP*A'-A*PP*C'*inv(VV+C*PP*C')*C*PP*A'+ WW;
423 end
424
425 Kalman = A*PP*C'*inv(VV+C*PP*C');
```