

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SERGIPE
CAMPUS ARACAJU
DIRETORIA DE ENSINO
COORDENADORIA DE ENGENHARIA CIVIL
CURSO DE BACHARELADO EM ENGENHARIA CIVIL

MISAEAL DE ALMEIDA SANTANA SILVA

**EMPREGO DE FERRAMENTA COMPUTACIONAL, EM PYTHON, NO
DIMENSIONAMENTO DE LAJES NERVURADAS EM CONCRETO ARMADO.**

MONOGRAFIA

ARACAJU
2024

MISAEAL DE ALMEIDA SANTANA SILVA

**EMPREGO DE FERRAMENTA COMPUTACIONAL, EM PYTHON, NO
DIMENSIONAMENTO DE LAJES NERVURADAS EM CONCRETO ARMADO.**

Monografia apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel, da Coordenação do Curso de Engenharia Civil, do Instituto Federal de Sergipe – Campus Aracaju.

Orientador: Prof. Dr. Euler Wagner Freitas Santos

ARACAJU

2024

S586e Silva, Misael de Almeida Santana.
Emprego de ferramenta computacional, em PYTHON, no dimensionamento de lajes nervuradas em concreto armado./ Misael de Almeida Santana Silva. – Aracaju, 2024.
83f.: il.

Monografia – Curso Engenharia Civil– Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de Sergipe – IFS.
Orientador: Prof. Dr. Euler Wagner Freitas Santos.

1. Lajes nervuradas. 2. Concreto armado. 3. Engenharia Civil. I. Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de Sergipe - IFS. II. Santos, Euler Wagner Freitas. III. Título.

CDU: 624

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SERGIPE

CAMPUS ARACAJU

CURSO DE BACHARELADO EM ENGENHARIA CIVIL

TERMO DE APROVAÇÃO

Título da Monografia N° 289

**EMPREGO DE FERRAMENTA COMPUTACIONAL, EM PYTHON, NO
DIMENSIONAMENTO DE LAJES NERVURADAS EM CONCRETO ARMADO**

MISAEAL DE ALMEIDA SANTANA SILVA

Esta monografia foi apresentada às 10 h 30 do dia 18 de SETEMBRO de 2024 como requisito parcial para a obtenção do título de BACHAREL EM ENGENHARIA CIVIL. O candidato foi arguido pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.



Prof. M.Sc. Marcílio Fabiano Goivinho da
Silva

(IFS – Campus Aracaju)



Eng. Rodrigo Trindade Alves
(Engenheiro)



Prof. Dr. Euler Wagner Freitas Santos

(IFS – Campus Aracaju)
Orientador



Prof. Dr. Pablo Gleydson de Sousa

(IFS – Campus Aracaju)
Coordenador da COEC

Dedico este trabalho à minha família,
à minha esposa, à minha mãe e ao meu pai,
pelo apoio e incentivo constante.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, à Deus, por todas as bênçãos recebidas durante esta jornada, em especial pela saúde e pela força para concluir este curso.

Agradeço ao IFS por proporcionar um ambiente de aprendizado de qualidade, à Coordenação do curso, e a todos os professores que contribuíram para minha formação, em especial ao meu orientador, Euler Wagner Freitas Santos, cuja orientação e conhecimento foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço à minha esposa Clau, por seu amor, companheirismo e apoio incondicional em todos os momentos. Ao meu pai, Erinaldo, em memória, por ter sempre acreditado em mim e me incentivado a buscar conhecimento. À minha mãe, Vera, por todo o carinho e cuidado, que sempre me proporcionou um ambiente acolhedor para que pudesse focar nos estudos.

Agradeço aos meus irmãos, Gis, Gueu, Helyel e Raquel, por sua amizade e apoio constante.

Agradeço também ao meu amigo Marcílio, companheiro de batalha, pela sua parceria, ajuda e incentivo durante todo o curso.

Aos meus amigos do curso de Licenciatura em Matemática, em especial, Lucas e Noely, agradeço por fazer parte dessa caminhada.

Agradeço ao meu amigo, Izaías, um irmão, que sempre me apoiou e me incentivou.

Agradeço ao meu sogro e à minha sogra, pelo apoio e torcida nesse curso.

Agradeço também aos colegas de trabalho, por sempre torcerem por mim.

A todos, o meu sincero MUITO OBRIGADO.

Que este trabalho possa abençoar e servir
de referência para futuras pesquisas.
“Até aqui nos ajudou o SENHOR”
(I SAMUEL 7:12, parte b)

RESUMO

SILVA, Misael de Almeida Santana. **Emprego de Ferramenta Computacional, em *Python*, no Dimensionamento de Lajes Nervuradas em Concreto Armado**. 83 folhas. Monografia (Bacharelado em Engenharia Civil) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Sergipe – Campus Aracaju. 2024.

As lajes nervuradas são normalmente utilizadas em edificações que possuem vãos entre vigas em torno de 7m. Nessa situação, esse tipo de laje é uma alternativa para evitar pesos próprios elevados. O projeto de laje nervuradas envolve procedimentos de cálculo relativamente longos e constituído por, basicamente, nove etapas. No entanto, há ausência de ferramentas computacionais de uso simplificado e de forma acessível para o dimensionamento de lajes nervuradas em concreto armado, especialmente no meio acadêmico. O presente estudo tem como propósito validar e analisar o *software* NervurasTool, desenvolvido em um projeto PIBIC, por estudantes do curso de Engenharia civil do IFS/campus Aracaju, e que é destinado ao dimensionamento de lajes nervuradas isotrópicas em concreto armado. O NervurasTool foi desenvolvido em *Python* e segue o roteiro de cálculo de Araújo (2014). Sua validação foi realizada através de um exemplo disponibilizado no livro “Curso de Concreto Armado” – volume 4 de Araújo (2014), além disso, foram realizados estudos comparativos com os resultados dos *softwares* Eberick e NervurasTool. Os resultados obtidos pelo NervurasTool mostram sua capacidade de realizar dimensionamento de lajes nervuradas de forma precisa e eficiente. Dessa maneira, este trabalho permitiu concluir que o NervurasTool é uma ferramenta computacional que se apresenta como um *software* promissor, contribuindo para o ensino e aprendizagem relacionados ao dimensionamento de lajes nervuradas em concreto armado, sendo uma ferramenta didática e intuitiva para estudantes e profissionais da área.

Palavras-chave: Lajes Nervuradas. *Software*. NervurasTool. Eberick. Concreto Armado.

ABSTRACT

SILVA, Misael de Almeida Santana. **Use of a Computational Tool, in Python, for the Dimensioning of Reinforced Concrete Ribbed Slabs**. 83 pages. Monography (Bachelor of Civil Engineering) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Sergipe – Campus Aracaju. 2024.

Ribbed slabs are commonly used in buildings with spans between beams of around 7m. In this situation, this type of slab is an alternative to avoid high self-weights. The design of ribbed slabs involves relatively long calculation procedures and consists of, basically, nine steps. However, there is a lack of simplified and accessible computational tools for the design of reinforced concrete ribbed slabs, especially in the academic environment. The present study aims to validate and analyze the NervurasTool software, developed in a PIBIC project by students of the Civil Engineering course at IFS/campus Aracaju, and which is intended for the design of isotropic reinforced concrete ribbed slabs. NervurasTool was developed in Python and follows the calculation script of Araújo (2014). Its validation was carried out through an example provided in the book "Curso de Concreto Armado" - volume 4 by Araújo (2014), in addition, comparative studies were carried out with the results of the Eberick and NervurasTool software. The results obtained by NervurasTool show its ability to perform the design of ribbed slabs accurately and efficiently. In this way, this work allowed us to conclude that NervurasTool is a computational tool that presents itself as a promising software, contributing to the teaching and learning related to the design of reinforced concrete ribbed slabs, being a didactic and intuitive tool for students and professionals in the area.

Keywords: Ribbed Slabs. *Software*. NervurasTool. Eberick. Reinforced Concrete.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Densidade de probabilidade da resistência	19
Figura 2 – Tipos de ensaios de resistência à tração do concreto	20
Figura 3 – Diagrama tensão-deformação do concreto	21
Figura 4 – Diagrama tensão-deformação do aço com patamar	23
Figura 5 – Diagrama tensão-deformação do aço sem patamar	23
Figura 6 – Representação dos elementos estruturais de concreto armado	24
Figura 7 – Representação de uma viga longitudinal e um corte transversal	25
Figura 8 – Representação de um pilar de centro	26
Figura 9 – Representação de um pilar de bordo	26
Figura 10 – Representação de um pilar de canto	27
Figura 11 – Representação de uma placa de laje	28
Figura 12 – Representação de alguns tipos de lajes	28
Figura 13 – Seção transversal de uma laje maciça	29
Figura 14 – Modelo de uma laje lisa	30
Figura 15 – Modelo de uma laje cogumelo	31
Figura 16 – Modelo de uma laje treliçada utilizando EPS	33
Figura 17 – Modelo de uma laje nervurada	33
Figura 18 – Corte transversal de uma laje nervurada	34
Figura 19 – Estrutura em 3D lançada no Eberick	37
Figura 20 – Elementos estruturais da laje e suas deformações	38
Figura 21 – Deformação da laje	38
Figura 22 – Deslocamentos calculados pelo Eberick	39
Figura 23 – Equilíbrio do elemento de placa	41
Figura 24 – Desenvolvimento do trabalho	42
Figura 25 – Gráfico com uma função polinomial e^{-x^2} , interpolado de grau 6° e grau 10°	44
Figura 26 – Laje nervurada – características geométricas (altura útil “d”, espessura da laje “hf”, largura da nervura “b” e altura total “ht”)	45
Figura 27 – Dois tipos de Ancoragem em apoio de extremidade, um sem gancho (a) e o outro com gancho (b)	52

Figura 28 – Representação do detalhamento de uma laje nervurada	53
Figura 29 – Planta de forma da laje nervurada de Araújo (2014)	54
Figura 30 – Cadastro do bloco de enchimento e ilustração do formato da nervura	55
Figura 31 – Valores adicionados para o cálculo da laje nervurada	56
Figura 32 – Estrutura em 3D do pórtico a partir dos elementos estruturais adicionados	58
Figura 33 – Dimensões da viga (20 cm x 50 cm)	76
Figura 34 – Dimensões do pilar (50 cm x 50 cm)	76
Figura 35 – Resultados obtidos: Momentos fletores e áreas de aço	77
Figura 36 – Modelo da laje nervurada com as dimensões das vigas de 20 cm x 50 cm	77
Figura 37 – Processo de análise para cálculo da estrutura no Eberick (modelo utilizado em todas as análises)	78
Figura 38 – Espaçamento de grelha utilizada para o cálculo de dimensionamento das lajes nervradas no Eberick	78
Figura 39 – Dimensões da viga (50 cm x 50 cm)	79
Figura 40 – Dimensões do pilar (50 cm x 50 cm)	79
Figura 41 – Resultados obtidos: Momentos fletores e áreas de aço	80
Figura 42 – Modelo da laje nervurada com as dimensões das vigas de 50 cm x 50 cm	80
Figura 43 – Dimensões da viga (70 cm x 80 cm)	81
Figura 44 – Dimensões do pilar (70 cm x 70 cm)	81
Figura 45 – Resultados obtidos: Momentos fletores e áreas de aço	82
Figura 46 – Modelo da laje nervurada com as dimensões das vigas de 70 cm x 80 cm	82

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Correspondência entre a classe de agressividade ambiental e o cobrimento nominal	45
Tabela 2 – Fatores de combinação de redução para ações variáveis	47
Tabela 3 – Definição dos valores do coeficiente ψ_3	49
Tabela 4 – Valores da taxa de armadura mínima para aço CA-50 de acordo com algumas classes de concreto, para valores de $d/h = 0,80$	50
Tabela 5 – Resultados do exemplo 6.4 para viga de 20 cm x 50 cm	58
Tabela 6 – Resultados do exemplo 6.4 para viga de 50 cm x 50 cm	59
Tabela 7 – Resultados do exemplo 6.4 para viga de 70 cm x 80 cm	59
Tabela 8 – Resultados do redimensionamento no Eberick	61
Tabela 9 – Resultados para laje nervurada de 700 cm x 700 cm com $l_0 + b \leq 65 \text{ cm}$	62
Tabela 10 – Resultados para laje nervurada de 700 cm x 700 cm com $l_0 + b > 65 \text{ cm}$	63
Tabela 11 – Resultados para laje nervurada de 800 cm x 800 cm com $l_0 + b \leq 65 \text{ cm}$	63
Tabela 12 – Resultados para laje nervurada de 800 cm x 800 cm com $l_0 + b > 65 \text{ cm}$	63
Tabela 13 – Resultados para laje nervurada de 900 cm x 900 cm com $l_0 + b \leq 65 \text{ cm}$	66
Tabela 14 – Resultados para laje nervurada de 900 cm x 900 cm com $l_0 + b > 65 \text{ cm}$	66

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Comparação dos momentos fletores solicitantes nas direções de x e y	61
Gráfico 2 - Comparativo da tabela 9 a tabela 12 dos resultados de momento fletor nas nervuras das direções de x e de y	64
Gráfico 3 - Comparativo da tabela 9 a tabela 12 dos resultados das áreas de aço nas nervuras nas direções de x e de y	65
Gráfico 4 - Comparativo da tabela 13 e a tabela 14 da relação entre o momento fletor nas nervuras e as áreas de aço nas nervuras, na direção x e na direção y	67

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	OBJETIVOS	17
2.1	OBJETIVO GERAL	17
2.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	17
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	18
3.1	CONCRETO ARMADO	18
3.1.1	Resistência à Compressão	18
3.1.2	Resistência à Tração	19
3.1.3	Módulo de Elasticidade do Concreto	21
3.1.4	Aços para Concreto Armado	22
3.2	ELEMENTOS ESTRUTURAIS	24
3.2.1	Vigas	24
3.2.2	Pilares	25
3.2.2.1	Pilares de centro	25
3.2.2.2	Pilares de bordo	26
3.2.2.3	Pilares de canto	27
3.2.3	Lajes	27
3.2.3.1	Lajes Maciças	29
3.2.3.2	Laje Lisa e Laje Cogumelo	30
3.2.3.3	Lajes Trelaçadas	32
3.3	LAJE NERVURADA	33
3.3.1	Prescrições Normativas para Lajes Nervuradas, ABNT NBR 6118:2023	34
3.4	FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS	35
3.4.1	Eberick	37
3.4.2	A linguagem utilizada no desenvolvimento do <i>software</i> objeto deste estudo	39
4	METODOLOGIA	42
4.1	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	43
4.1.1	Conceitos Básicos para o Projeto de Lajes Nervuradas	43
4.1.2	Interpolação Numérica	43
4.1.3	Utilização da Linguagem de Programação	44

4.2	FUNCIONALIDADE E IMPLEMENTAÇÃO DOS CÁLCULOS DE DIMENSIONAMENTO NO SOFTWARE	44
4.3	VALIDAÇÃO DO SOFTWARE.....	53
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	58
5.1	RESULTADOS DA VALIDAÇÃO DO SOFTWARE.....	58
5.1.1	Análise dos valores obtidos na Tabela 5 para a validação do <i>software</i>	59
5.1.2	Redimensionamento da laje no Eberick com flecha final menor que a flecha admissível	61
5.2	COMPARATIVO ENTRE RESULTADOS DO NERVURASTOOL E O EBERICK	62
6	CONCLUSÃO.....	68
	REFERÊNCIAS.....	70
	Anexo 1 – Tabela A2.1 – Laje retangular simplesmente apoiada no contorno com cargas uniformemente distribuída.....	73
	Anexo 2 – Tabela A3.2 – Área da seção de armadura, A_s (cm²).....	74
	Anexo 3 – Área da seção de armadura A_{sw} (cm²/m) para estribos de dois ramos	75
	Apêndice A – Imagens das análises realizadas no Eberick para vigas com largura de 20 cm e altura de 50 cm.....	76
	Apêndice B – Imagens das análises realizadas no Eberick para vigas com largura de 50 cm e altura de 50 cm.....	79
	Apêndice C – Imagens das análises realizadas no Eberick para vigas com largura de 70 cm e altura de 80 cm.....	81

1 INTRODUÇÃO

O concreto é um dos materiais da construção civil mais utilizados nos últimos tempos, devido à facilidade de manejo e procedimento nos elementos construtivos. Mesmo com uma baixa resistência à tração, o concreto em conjunto com o aço tem uma boa resistência à tração e à compressão (CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2013).

No ramo da construção civil, o concreto armado se destaca como material essencial para o desenvolvimento das edificações, impulsionando a crescente complexidade dos projetos estruturais. Diante do aumento da demanda, a elaboração manual de projetos tornou-se inviável, exigindo o uso de ferramentas computacionais para otimizar o processo (KIMURA, 2018). O aumento rigoroso e o detalhamento das normas técnicas, exigem que os programas computacionais utilizados na construção civil sejam cada vez mais precisos e calibrados. Essa necessidade se justifica pela busca por soluções seguras, confortáveis e que atendam às expectativas dos usuários, sempre em conformidade com as diretrizes das normas. Nesse contexto, os *softwares* se tornam ferramentas essenciais para os projetistas, otimizando o processo de elaboração de projetos e garantindo a qualidade das edificações (OLIVEIRA e SANTOS, 2015).

Com o crescimento das construções no Brasil, as empresas que se destacam são as que elaboram seus projetos com a intenção de economizar material, trazer qualidade à obra, além de conforto e segurança aos usuários, dessa forma, a utilização de ferramentas computacionais tem possibilitado atendimento e sucesso nos projetos desses empreendimentos. No passado, as construções em concreto armado demandavam elementos estruturais mais robustos, o que elevava significativamente os custos das obras. Com a evolução tecnológica, houve melhorias nas propriedades mecânicas dos materiais, com aços mais resistentes e dúcteis, e inovações na tecnologia do concreto, o que possibilitou a redução das quantidades de peças estruturais e permitiu também maiores vãos dos edifícios (SPOHR, 2008).

Na superestrutura das edificações em concreto armado destacam-se os seguintes elementos: as vigas, os pilares e as lajes. Elementos essenciais para a estabilidade de um edifício, elementos esses que suportam forças horizontais e forças verticais (SILVA, 2011). As vigas são barras com sentido horizontal geralmente sob a laje, sustentando os esforços que recebe das paredes e das lajes, transferindo as

ações para os seus apoios. Os pilares são barras comumente concebidas na direção que recebe ações transmitidas das vigas e das lajes e transportam as cargas recebidas para as fundações. Na classificação dos elementos estruturais quanto a forma geométrica, as lajes podem ser consideradas placas por receberem cargas perpendiculares a sua superfície (LIBÂNIO, 2010).

Diante das diretrizes abordadas, destacam-se as lajes nervuradas, material de estudo deste trabalho. A laje nervurada é economicamente viável para vencer grandes vãos quando comparado com as lajes maciças. Além de economizar aço, diminui o desperdício de concreto e reduz a quantidade de fôrmas. As lajes nervuradas têm uma redução em seu peso próprio, quando relacionada às lajes maciças (CHUST, 2013). As lajes nervuradas podem ser dimensionadas em uma única direção (unidirecionais) ou em duas direções (bidirecionais). Quando dimensionadas em uma única direção, será constituída por nervuras principais longitudinais ordenado apenas em uma direção, e quando dimensionadas bidirecionalmente terão suas nervuras principais com duas direções, conhecidamente como lajes nervuradas isotrópicas (ANTUNES, 2019).

Devido à sua complexidade, o uso de ferramentas computacionais é indispensável para o dimensionamento das Lajes Nervuradas. Em razão dos programas computacionais terem custo elevado, atualmente há uma dificuldade no acesso a determinadas ferramentas de dimensionamentos de projetos estruturais.

Dessa forma, esse estudo se propõe a validar e analisar o *software* NervurasTool, desenvolvido em um projeto PIBIC (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica), com o nome “Desenvolvimento de uma Ferramenta Computacional Acadêmica para uso no Dimensionamento de Lajes Nervuradas em Concreto Armado” referente ao edital 01/2023/DPP/PROPEX/IFS, e voltado ao dimensionamento de lajes nervuradas isotrópicas em concreto armado. O *software* foi desenvolvido na linguagem *Python*, em conformidade com as normas técnicas estruturais pertinentes ao tema. A validação da ferramenta se dará através de duas etapas: a primeira etapa será utilizada o exemplo 6.4 do livro "Curso de Concreto Armado" – volume 4 de Araújo (2014). Os resultados obtidos pelo *software* serão comparados com os resultados do *software* estrutural AltoQi Eberick. Essa etapa visa garantir a precisão e confiabilidade do *software* desenvolvido. Para aprofundar a validação, a segunda etapa será realizada uma análise comparativa abrangente entre o *software* NervurasTool, registrado sob o nº BR512024002985-0 junto ao INPI

(Instituto Nacional da Propriedade Industrial), e o Eberick, com foco em vãos entre vigas de 7 a 9 metros. Essa etapa permitirá identificar as limitações e os pontos fortes da ferramenta desenvolvida.

2 OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GERAL

Validar e analisar a eficiência do *software* NervurasTool, para o dimensionamento de lajes nervuradas isotrópicas em concreto armado, considerando diferentes condições de vãos entre vigas e de distância entre eixos de nervuras.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Realizar um estudo comparativo detalhado entre os resultados obtidos pelo *software* desenvolvido (NervurasTool) e os do Eberick, para vãos entre vigas de 7m, 8m e 9m;

Identificar as principais diferenças nos resultados de esforços, de armaduras e de deformações, analisando as possíveis causas dessas diferenças;

Analisar a influência dos métodos de cálculo de laje à flexão, flexão de placas e grelha equivalente, utilizados pelos *softwares* NervurasTool e Eberick, respectivamente, nos resultados obtidos para as lajes nervuradas;

Avaliar a eficiência do NervurasTool no dimensionamento de lajes nervuradas com diferentes distâncias entre eixos de nervuras, considerando tanto valores menores, quanto maiores que 65 cm;

Analisar o comportamento das lajes nervuradas sob diferentes condições de espaçamentos entre eixos de nervuras, com valores acima e abaixo de 65 cm, a fim de identificar a influência nas deformações, nos esforços solicitantes e no comportamento geral das lajes.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 CONCRETO ARMADO

O concreto armado tem uma grande importância para as áreas da construção civil, sendo o material estrutural mais utilizado pelo homem. Freitas (2019) relata que o concreto armado foi o sistema construtivo mais utilizado no século XX. O concreto por sua vez, é um material fluido que se molda a cada forma geométrica e que apresenta uma boa resistência à compressão. Em combinação com o aço, tem-se o concreto armado, provendo o elemento feito desse material de boa performance na sua resistência, sendo resistente também à tração. A junção desses materiais torna o concreto armado um material composto, no qual, a qualidade de um corrige a fraqueza do outro. Para Bastos (2006), o concreto armado é a união de um concreto simples e de um material que resiste à tração (envolvido pelo concreto), tendo assim, uma solidariedade entre os elementos e resistindo aos esforços que são solicitados. Assim, o concreto armado é composto por: concreto simples + armadura de aço.

O concreto armado tem boas funcionalidades devido à aderência que está presente entre esses dois materiais. Por causa da aderência às deformações das barras de aço são aproximadamente parecidas com as deformações do concreto que o envolve. Devido à baixa resistência do concreto aos esforços de tração, sendo fissurado na zona tracionada do elemento estrutural, a responsabilidade dos esforços de tração passa para as barras de aço, e isso torna possível que a estrutura de concreto armado não tenha ruína brusca (ARAÚJO, 2014).

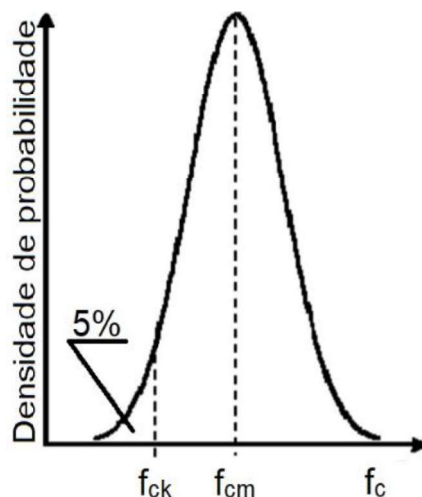
3.1.1 Resistência à Compressão

Através de ensaios de corpo de prova com o concreto no formato de um cilindro, o rompimento deve ser feito conforme a NBR 5739:2018, é obtido a resistência à compressão (f_c), após uma determinada idade. A resistência à compressão média (f_{cm}) deve ser feita conforme indicado na NBR 12655:2022 (NBR 6118:2023).

Após os ensaios com uma grande quantidade de corpos de prova, serão estabelecidas resistências à compressão do determinado concreto analisado. Assim, através do (f_c) pode ser obtido um gráfico, denominado como densidade de frequência, apresentando os dados de (f_c) em relação a quantidade de corpos de

prova. O gráfico é conhecido como a curva normal gaussiana, como ilustra a Figura 1 (ARAÚJO, 2014).

Figura 1 - Densidade de probabilidade da resistência.



Fonte: ARAÚJO, 2014.

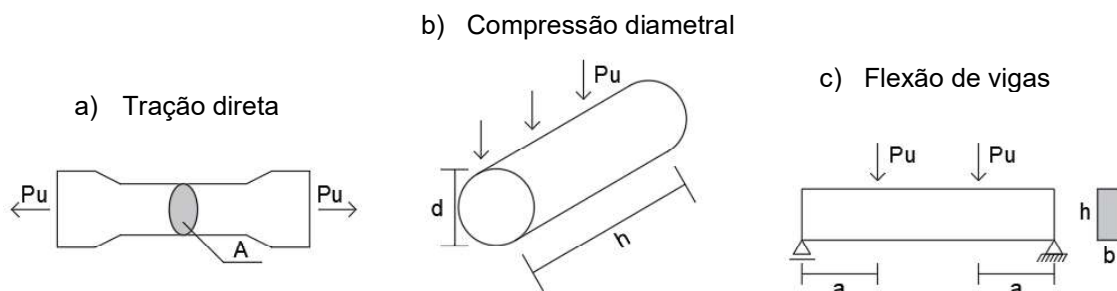
A curva traz valores importantes em relação à resistência à compressão, como: a resistência média à compressão (f_{cm}) e a resistência característica à compressão (f_{ck}). Estas resistências são essenciais para o dimensionamento de estruturas de concreto. É estabelecida na tabela 12.1 da NBR 6118:2023, um coeficiente de minoração (γ_c), que é dividido pela resistência característica (f_{ck}) obtendo assim a resistência de cálculo do concreto à compressão (f_{cd}), como apresenta a Equação 1 (ARAÚJO, 2014).

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (\text{Equação 1})$$

3.1.2 Resistência à Tração

Segundo Araújo (2014), possuem três tipos de ensaios para estabelecer a resistência do concreto à tração, que são: ensaio por tração axial, ensaio de compressão diametral e ensaio de flexão. A Figura 2 ilustra os três tipos de ensaios para resistência à tração do concreto, que são: Tração direta (a), Compressão diametral (b) e Flexão de vigas (c).

Figura 2 - Tipos de ensaios de resistência à tração do concreto.



Fonte: ARAÚJO, 2014, adaptado.

De maneira parecida com a resistência à compressão, é definido a resistência à tração média (f_{ctm}) e o valor da resistência à tração característica (f_{ctk}) (ARAÚJO, 2014). A NBR 6118:2023 recomenda que sejam realizados os ensaios seguindo as premissas da NBR 7222:2011 e da NBR 12142:2010, para estabelecer a resistência à tração indireta ($f_{ct,sp}$) e a resistência à tração na flexão ($f_{ct,f}$), respectivamente. Para obter a resistência à tração direta (f_{ct}) pode ser levado em consideração a multiplicação de $0,9 \cdot f_{ct,sp}$ ou $0,7 \cdot f_{ct,f}$, resultados alcançados através de ensaios. Na falta de ensaios para determinação da resistência à tração indireta e de flexão, a resistência pode ser considerada utilizando o valor médio e característico, seguindo as equações a seguir (para concreto até C50) – modelo CEB/90:

$$f_{ct,m} = 1,40 \left(\frac{f_{ck}}{10} \right)^{2/3} \quad (\text{Equação 2})$$

$$f_{ctk,inf} = 0,7 f_{ct,m} \quad (\text{Equação 3})$$

$$f_{ctk,sup} = 1,3 f_{ct,m} \quad (\text{Equação 4})$$

Onde:

$f_{ct,m}$ – Resistência característica média à tração do concreto;

$f_{ctk,inf}$ – Resistência característica à tração inferior do concreto;

$f_{ctk,sup}$ – Resistência característica à tração superior do concreto;

$f_{ct,m}$ e f_{ck} em MPa.

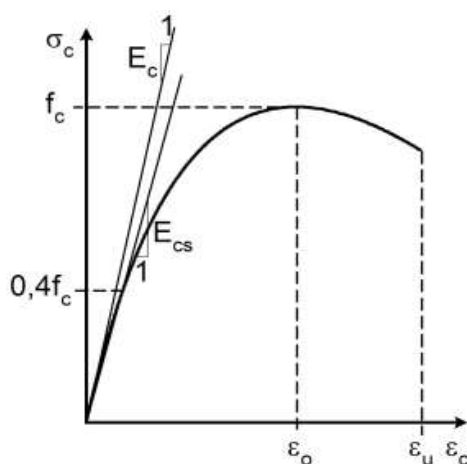
De forma análoga, com a resistência à compressão, haverá um aumento da resistência à tração quando se tem um crescimento na taxa de tensão. Para o dimensionamento de estruturas pode ser desconsiderada a resistência à tração do concreto, pois é uma propriedade muito inferior em relação a resistência à

compressão, sendo, portanto, desprezível em muitas situações de cálculo de elementos estruturais, a favor da segurança da estrutura de concreto armado. Quando a verificação é na deformação estrutural com as cargas de serviço, deve ser considerado o concreto tracionado (ARAÚJO, 2014).

3.1.3 Módulo de Elasticidade do Concreto

Quando o concreto é exposto a grandes cargas apresentará um comportamento não linear. Esse comportamento é causado por pequenas fissuras progressivas em sua área de interação com os componentes do concreto. O diagrama tensão e deformação ($\sigma_c \times \varepsilon_c$), ilustrado na Figura 3, mostra que não há proporcionalidade entre a tensão e deformação, não obedecendo à Lei de Hooke (ARAÚJO, 2014).

Figura 3: Diagrama tensão-deformação do concreto.



Fonte: ARAÚJO, 2014.

A reta que tangencia a curva na origem do diagrama é conhecida como o módulo de elasticidade (E_c), o seu valor é obtido a partir do ensaio regido pela NBR 8522-1:2021, após os 28 dias de idade do concreto, sendo considerado o seu módulo de deformação tangencial inicial, caso não tenha a realização de ensaios o valor de (E_c) pode ser estabelecido pela equação 5, para resistência do concreto de 20 MPa até 50 MPa (NBR 6118:2023).

$$E_c = \alpha_E \cdot 5600 \sqrt{f_{ck}} \quad (\text{Equação 5})$$

Onde:

$\alpha_E = 1,2$ para basalto e diabásio;

$\alpha_E = 1,0$ para granito e gnaisse;

$\alpha_E = 0,9$ para calcário;

$\alpha_E = 0,7$ para arenito;

E_c e f_{ck} em MPa.

De maneira parecida, o módulo secante (E_{cs}), parte da origem e corta o diagrama no ponto de tensão da ordem $0,4 \cdot f_c$, onde (f_c) é a resistência à compressão do concreto (ARAÚJO, 2014). Na falta de ensaios, que são prescritos pela NBR 8522-1:2021 e NBR 8522-2:2021, os valores do (E_{cs}) podem serem encontrados pela equação 6 (CEB/90):

$$E_{cs} = 0,85 \cdot E_c \quad (\text{Equação 6})$$

Onde:

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \cdot \frac{f_{ck}}{80} \leq 1,0.$$

A relação entre o módulo de deformação e a resistência à compressão do concreto, ilustrado pela Figura 3, são válidas para concretos com massa específica normal e com cargas estáticas (ARAÚJO, 2014).

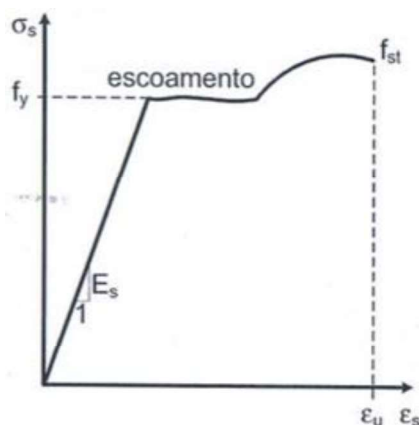
3.1.4 Aços para Concreto Armado

Os aços possuem boas propriedades mecânicas, que são: resistência à tração, à compressão e à flexão (FERRAZ, 2003). Devido a fragilidade do concreto na resistência à tração, sua junção com o aço torna a estrutura de concreto armado apta a absorver os esforços oriundos dos carregamentos predominantes nos elementos estruturais (ARAÚJO, 2014).

A NBR 7480:2022 fala que as armaduras para concreto armado são destacadas como barras ou fio, possuindo diâmetro mínimo de 4,2 mm, devendo ser feitas através de laminação a quente. As barras são das categorias CA-25 e CA-50 e os fios são da categoria de CA-60. O módulo de elasticidade do aço pode ser definido como 210 GPa , caso o fabricante não tenha estabelecido o seu valor (NBR 6118:2023).

O diagrama tensão-deformação, para aços obtidos por laminação à quente, apresentam patamar de escoamento (ARAÚJO, 2014). A Figura 4 ilustra o diagrama tensão-deformação do aço com patamar de escoamento.

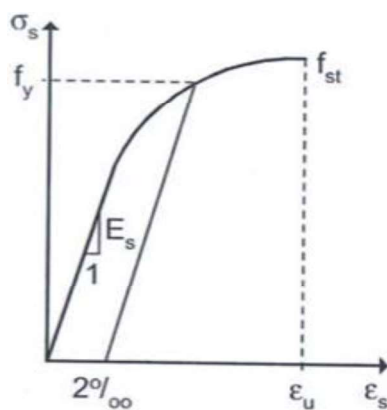
Figura 4: Diagrama tensão-deformação do aço com patamar.



Fonte: ARAÚJO, 2014.

Os fios, que são obtidos por trefilação, não apresentam um patamar de escoamento definido, com a tensão de escoamento (f_y) correspondendo a uma deformação de 2 ‰ (ARAÚJO, 2014). A Figura 5 mostra um diagrama tensão-deformação do aço sem patamar.

Figura 5: Diagrama tensão-deformação do aço sem patamar.



Fonte: ARAÚJO, 2014.

Onde, de acordo com as Figuras 4 e 5, são definidos:

f_y – Tensão de escoamento;

f_{st} – Tensão de ruptura;

E_s – Módulo de elasticidade;

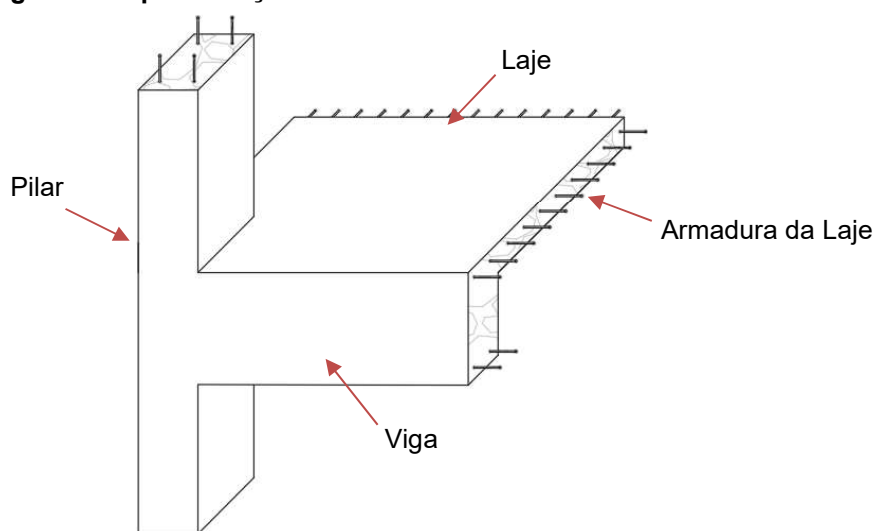
ϵ_u – Deformação de ruptura.

Usualmente, nas construções de elementos estruturais de concreto armado, não é recomendado o uso de diferentes tipos de categorias de aço para não haver possíveis erros no canteiro de obra. Mas é permitido o uso de dois tipos de categorias de aço para um elemento estrutural quando um é aplicado para as armaduras longitudinais e o outro para as armaduras transversais (ARAÚJO, 2014).

3.2 ELEMENTOS ESTRUTURAIS

As superestruturas de concreto armado, como ilustrado na Figura 6, são formadas pelos seguintes elementos estruturais: Vigas, Pilares e Lajes.

Figura 6: Representação dos elementos estruturais de concreto armado.



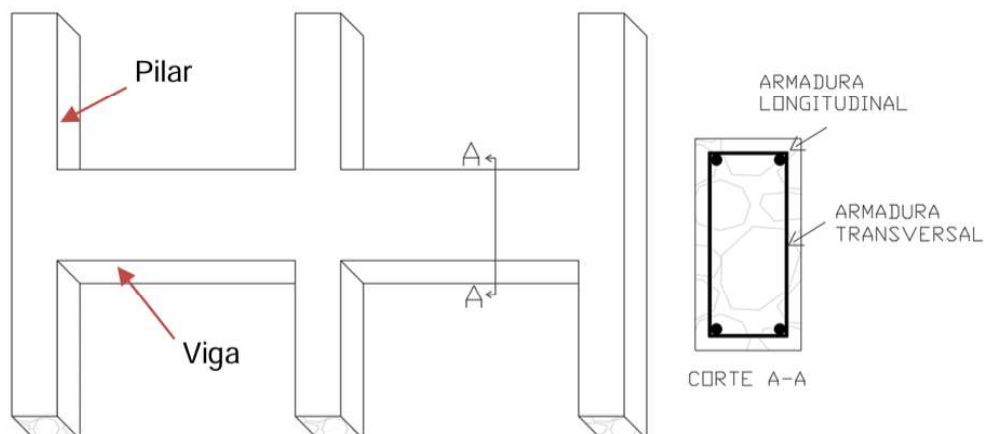
Fonte: SPOHR, 2008, adaptado.

3.2.1 Vigas

Segundo definições da NBR 6118:2023 (item 14.4.1.1, p.83), as vigas são elementos lineares em que a flexão é preponderante.

As vigas são elementos de barras normalmente retas e no sentido horizontal. Elas recebem as ações oriundas de lajes, de alvenarias, de pilares, entre outros. As vigas têm por finalidade distribuir as cargas recebidas ao longo de um vão para os seus apoios (PINHEIRO, 2007). A Figura 7 apresenta uma ilustração de vista longitudinal de uma viga contendo armadura longitudinal e transversal, detalhada no corte.

Figura 7: Representação de uma viga longitudinal e um corte transversal.



Fonte: AUTOR, 2024.

Para que seja dimensionada uma viga, inicialmente, é necessário que seja feito o levantamento das cargas solicitantes do projeto, as quais serão aplicadas na estrutura. Também é importante serem feitas as análises dos esforços solicitantes normais e cisalhantes, oriundos, principalmente, de flexão e de torção (PINHEIRO, 2007). Essas informações iniciais são indispensáveis para o correto dimensionamento.

3.2.2 Pilares

De acordo com a NBR 6118:2023 (item 14.4.1.2, p.84), pilares são elementos lineares de eixo reto, usualmente dispostos na vertical, em que as forças normais de compressão são preponderadas.

A finalidade dos pilares em um projeto estrutural é a responsabilidade de transferência de cargas das superestruturas para as infraestruturas, ou seja, transferência das estruturas para as fundações.

Segundo Diniz, Lages e Barboza (2019), os pilares possuem dimensões transversais menores que a dimensão longitudinal.

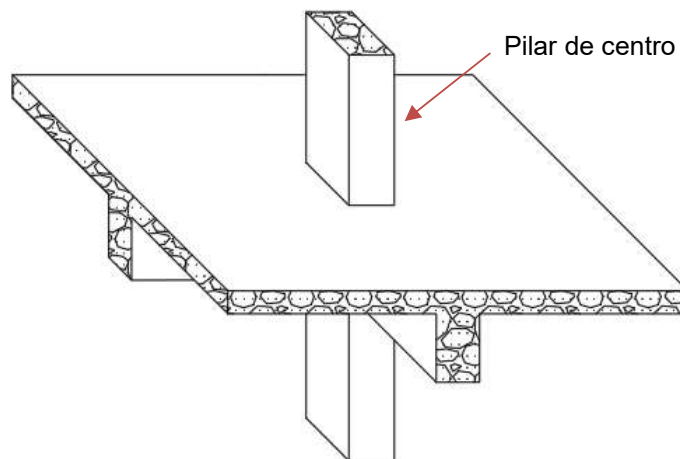
Os pilares são destacados da seguinte forma:

3.2.2.1 Pilares de centro

Os pilares de centro ou intermediários, como ilustra a Figura 8, inicialmente, podem ser calculados sem a consideração dos momentos fletores, calculando os momentos mínimos de primeira ordem em relação aos eixos do pilar, através do que

é disposto na NBR 6118:2023. As solicitações de pilares de centro são dadas através de compressão centrada (ARAÚJO, 2014).

Figura 8: Representação de um pilar de centro.

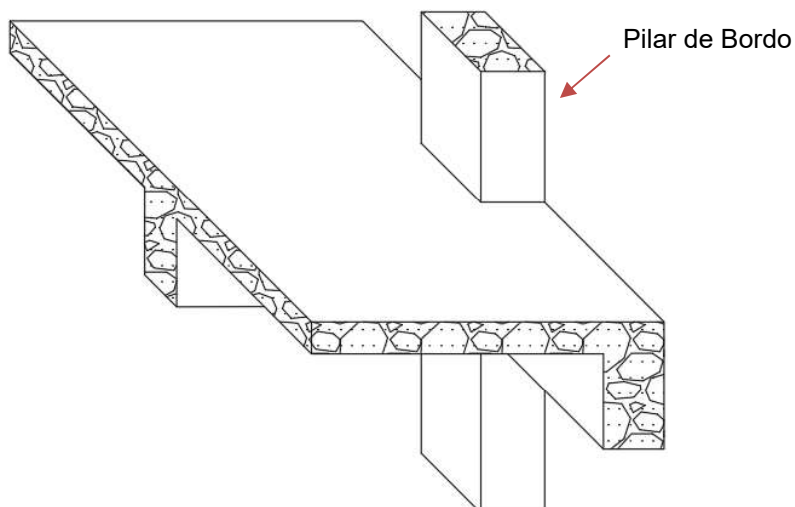


Fonte: FUSCO, 1981, adaptado.

3.2.2.2 Pilares de bordo

Os pilares de bordo ou extremos, como demonstra a Figura 9, são submetidos por flexão composta normal, no qual, as tensões de compressão atuam em conjunto com o momento fletor, essa ação está diretamente relacionada com o eixo principal do pilar. Esse tipo pilar sofre flexão composta normal em razão da viga ser interrompida, atuando perpendicularmente a extremidade do pilar (ARAÚJO, 2014).

Figura 9: Representação de um pilar de bordo.

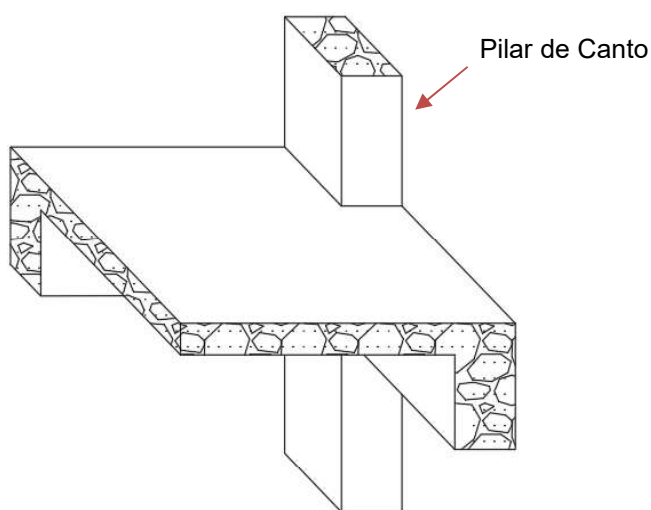


Fonte: FUSCO, 1981, adaptado.

3.2.2.3 Pilares de canto

Os pilares de canto (Figura 10) estão sujeitos a uma flexão oblíqua composta. As solicitações iniciais sobre esses elementos estruturais são resultantes da combinação de esforços normais e dois momentos fletores que atuam fora dos eixos principais do pilar (ARAÚJO, 2014).

Figura 10: Representação de um pilar de canto.



Fonte: FUSCO, 1981, adaptado.

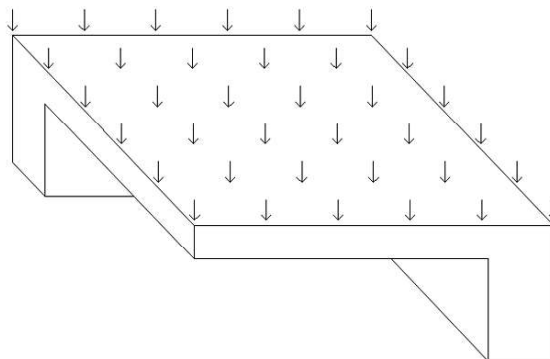
O formato e a localização dos pilares vão depender da posição e comportamento das vigas e das lajes, sendo levado em conta a compatibilização com o projeto arquitetônico. Pilares ligados entre vigas são considerados como pórticos, tendo a função de suportar as ações do vento e outras ações que um edifício é solicitado. Os Pilares também podem ser ligados diretamente às lajes, ou seja, laje lisa ou ligados em capitéis que interligam as lajes, sendo assim laje cogumelo (PINHEIRO, 2007).

3.2.3 Lajes

As lajes que são, na sua maioria, entendidas como placas de concreto, de acordo com a NBR 6118:2023 (item 14.4.2.1, p.84) são elementos de superfície plana, sujeitas principalmente a ações normais a seu plano. Com a funcionalidade de servir como cobertura ou piso na construção civil, que tendem a receber as ações perpendiculares quando aplicadas ao plano da laje (ver Figura 11). As lajes

transmitem as cargas para as vigas, quando são lajes mais tradicionais (maciça, nervuradas, entre outras) ou diretamente para os pilares (lisas ou cogumelos).

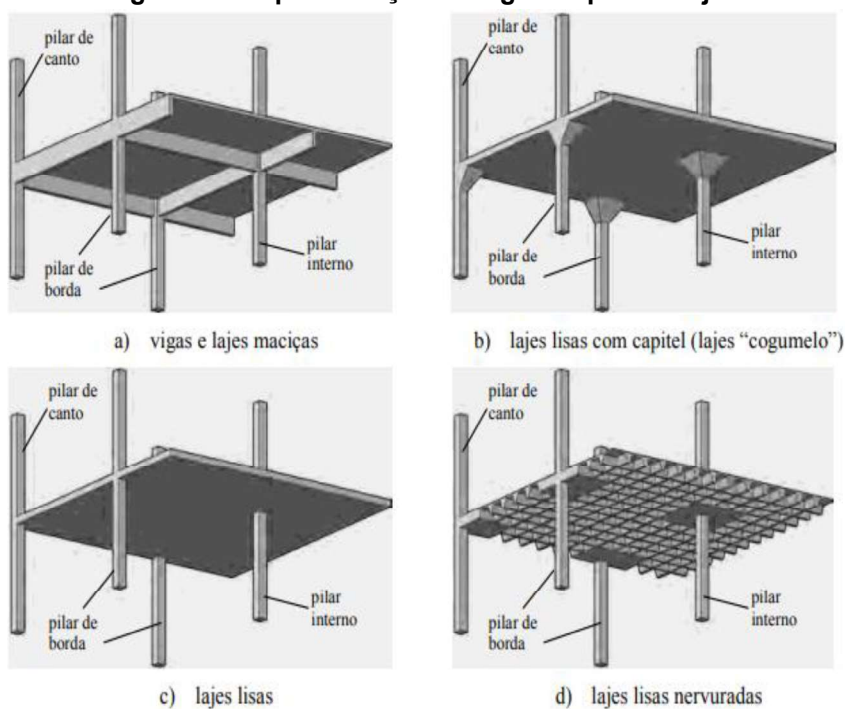
Figura 11: Representação de uma placa de laje.



Fonte: AUTOR, 2024.

Conforme BASTOS (2006), as ações podem ser distribuídas e concentradas. As ações distribuídas por unidade de área estão relacionadas ao seu peso próprio, revestimentos, contrapiso etc. Há também a distribuída linearmente, caso das paredes apoiadas nas lajes. As ações concentradas seriam as cargas dos pilares que se apoiam nas lajes. A Figura 12 apresenta alguns tipos de lajes:

Figura 12: Representação de alguns tipos de lajes.



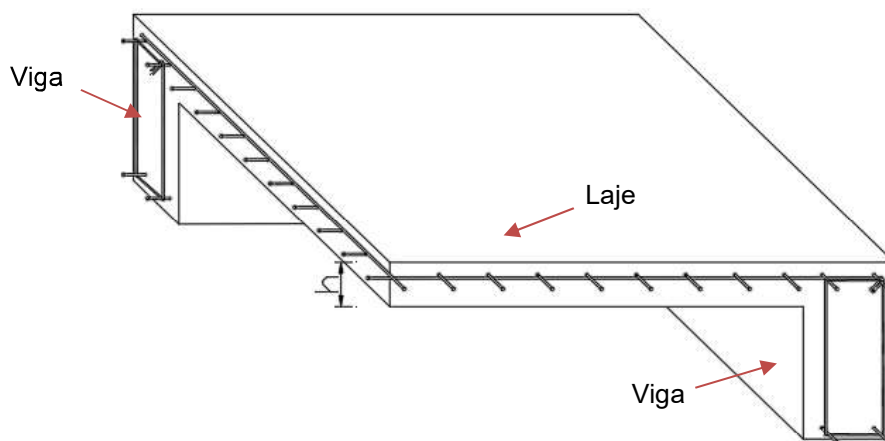
Fonte: FERREIRA, 2010.

São diversos tipos de lajes existentes, entre elas se destacam as abordadas a seguir.

3.2.3.1 Lajes Maciças

As lajes maciças são as mais usuais nas construções civis no território brasileiro, sendo moldadas *in loco*, são placas com espessura constante (ver Figura 13) normalmente dimensionadas em duas direções, com armaduras inferior e superior. Sua execução não precisa de mão de obra especializada, sendo uma execução rápida e simples. Devido ao seu peso próprio, quando comparado a outros tipos de lajes, não é vantajoso o uso de lajes maciças para vencer grandes vãos. Economicamente é viável sua utilização em vãos entre 3,5 m e 5,0 m (CARVALHO, 2012).

Figura 13: Seção transversal de uma laje maciça.



Fonte: AUTOR, 2024.

A NBR 6118:2023, destaca os limites mínimos das espessuras (h) da laje maciça, que são:

- 7 cm, para cobertura não em balanço;
- 8 cm, para lajes de piso não em balanço;
- 10 cm, para lajes em balanço;
- 10 cm, para lajes que suportem veículos de peso total menor ou igual a 30 kN;
- 12 cm, para lajes que suportem veículos de peso total maior que 30 kN;
- 15 cm, para lajes com protensão apoiadas em vigas, com o mínimo de $L/42$ para lajes de piso biapoiadas e $L/50$ para lajes de piso contínuas;
- 16 cm, para as lajes lisas e 14 cm para lajes-cogumelo, fora do capitel.

Algumas vantagens e desvantagens das lajes maciças são listadas por Lopes (2012), que são:

Vantagens:

- Facilidade de lançamento e adensamento do concreto convencional;
- Possibilidade de utilização de telas soldadas, agilizando a execução da armação;
- Segurança durante o processo de concretagem;
- Maior rigidez estrutural;
- Excelente capacidade de redistribuição de esforços.

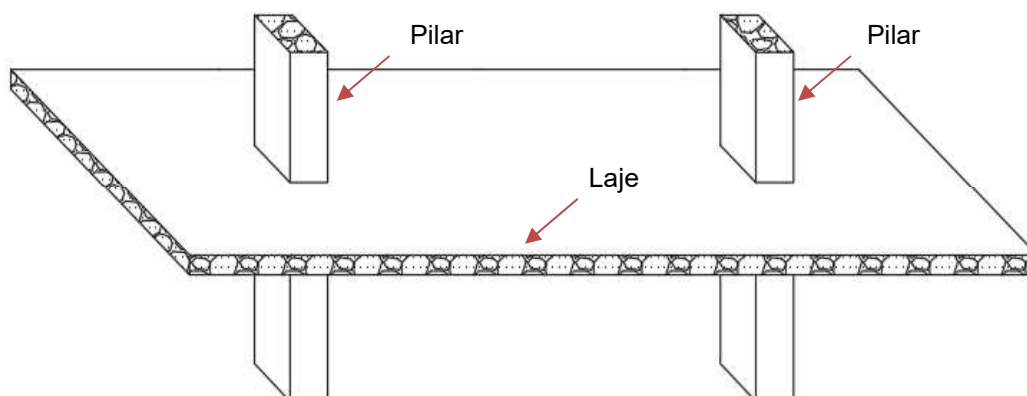
Desvantagens:

- Alto consumo de materiais: formas, escoras, concreto e aço em grande quantidade;
- Elevado peso próprio da estrutura, gerando sobrecargas nos apoios;
- Limitação para grandes vãos, devido a necessidade de espessuras consideráveis de concreto;
- Perdas de concreto durante a execução;
- Utilização de concreto em regiões que não exigem essa resistência.

3.2.3.2 Laje Lisa e Laje Cogumelo

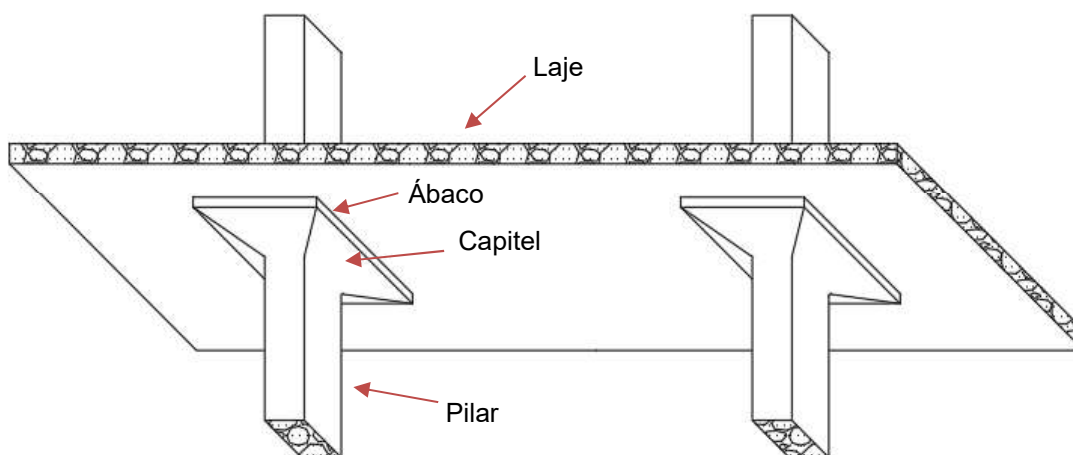
As lajes lisas ou cogumelo são lajes apoiadas diretamente em pilares, não havendo a presença de vigas, ou que possuem capitéis, que é o caso das lajes cogumelos. Nos casos em que possuem esses tipos de lajes a capacidade resistente desse é adquirida pelas tensões tangenciais de punção ocorrendo entre o pilar e a laje (ARAÚJO, 2014). A Figura 14 apresenta um modelo de uma laje lisa.

Figura 14: Modelo de uma laje lisa.



Geralmente, esses tipos de lajes são dimensionadas para que seja evitada a ruína por punção. A punção é dada pela atuação de uma força que se concentra acima do pilar, resultando em grandes tensões de cisalhamento que podem levar à ruína desse elemento. A ruptura por punção pode ocorrer de maneira inesperada, ou seja, sem aviso prévio (TRAUTWEIN, 2006). Para que seja evitado essas tensões cisalhantes são alargados o topo dos pilares, em contato com a laje, dando assim origem aos capitéis. A Figura 15 ilustra um modelo de uma laje cogumelo.

Figura 15: Modelo de uma laje cogumelo.



Fonte: AUTOR, 2024.

Normalmente, os capitéis são projetados com a forma tronco-cônico ou tronco-piramidal, podendo ser projetado de forma isolada ou podem ter um engrossamento da laje no local do pilar, como mostra a Figura 15. Segundo Araújo (2014), as lajes cogumelo e lisas devem ser contínuas, para que vença grandes vãos, suportando cargas de maior intensidade, ele relata também a importância de os pilares estarem em filas ortogonais e com poucas diferenças entre os vãos, assim, simplificará o dimensionamento dos esforços nesses elementos.

Segundo Araújo (2014), as principais vantagens das lajes lisas e cogumelo, são:

- É economicamente mais viável em grandes vãos e sob cargas elevadas, quando comparado às soluções tradicionais;
- Pode reduzir a altura do pé-direito de cada pavimento, dando a opção aumentar o número de pavimentos;
- Simplificação no uso das formas e facilidade de retirá-las;

- Facilidade de alteração do layout de pavimento, permitindo também, ter um ambiente mais arejado e mais iluminado, devido à ausência das vigas;

Apesar das vantagens acima, esses modelos de laje apresentam algumas desvantagens, conforme destacado por Hennrichs (2003):

- Punção das lajes: podendo ser solucionado através do aumento da espessura da laje e/ou também no dimensionamento da armadura de punção;
- Deslocamentos transversais: os deslocamentos são maiores do que o método de lajes sobre vigas, sendo para uma mesma rigidez e com vãos iguais.
- Estabilidade global do edifício: com a ausência de vigas, o edifício tende a diminuir a sua estabilidade global, uma alternativa para correção é adicionar ao edifício paredes estruturais.

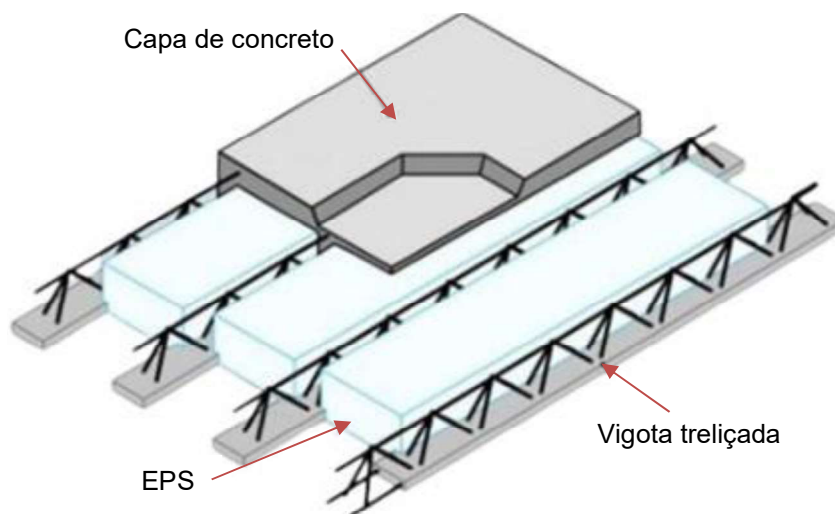
Por isso, as lajes lisas e cogumelos não podem ser empregadas em todas as situações, no caso de projetos residenciais, normalmente os pilares são distribuídos de forma que não há uma regularidade, trazendo assim um encarecimento no uso dessas lajes. No caso de edifícios elevados é necessário implementar elementos de contraventamento, que é o caso de paredes estruturais ou pilares-paredes, assim garantirá a indeslocabilidade horizontal (ARAÚJO, 2014).

3.2.3.3 Lajes Trelaçadas

A utilização da laje trelaçada diminui o peso próprio da estrutura, o que além de facilitar a construção, favorece a execução. A laje trelaçada tem elementos lineares pré-fabricados, sendo espaçadas uniformemente por elementos de enchimento, como lajotas ou isopor. A composição da laje exige a utilização de armaduras de distribuição (telas de aço) e, quando necessário, armaduras complementares. Após serem adicionados às lajotas ou isopor, sobre os quais são distribuídas as armaduras, realiza-se o preenchimento uniforme com concreto (TORRES, 2018).

A Figura 16 apresenta um modelo de lajes trelaçadas, com a utilização de EPS (isopor).

Figura 16: Modelo de uma laje treliçada utilizando EPS.

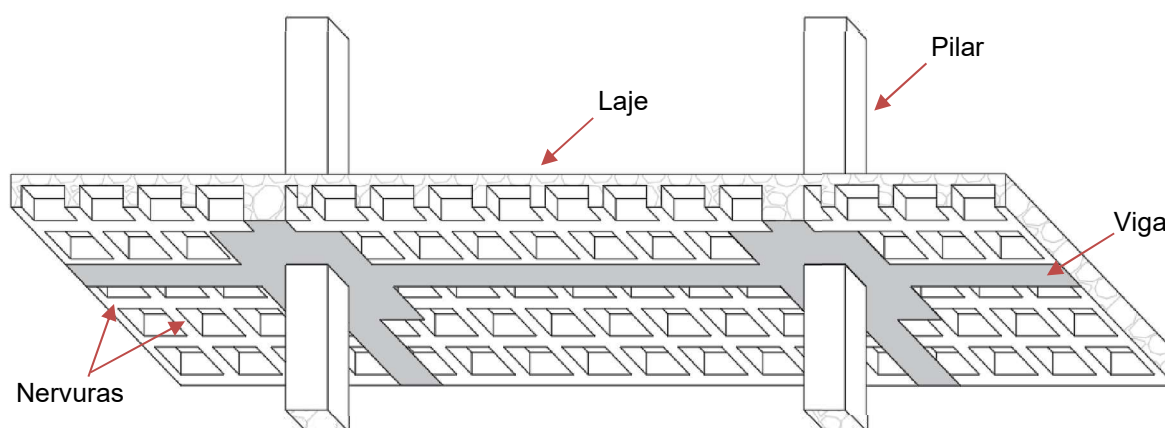


Fonte: DOMINGUES, SILVA e SOARES, 2018, adaptado.

3.3 LAJE NERVURADA

As lajes nervuradas, objetos deste estudo, são as lajes moldadas *in loco* com zona de tração para momentos positivos localizada nas nervuras. Entre as nervuras, pode ser colocado material inerte (NBR 6118:2023, item 14.7.7). As lajes nervuradas são compostas por um conjunto de nervuras, conforme ilustra a Figura 17.

Figura 17: Modelo de uma laje nervurada.



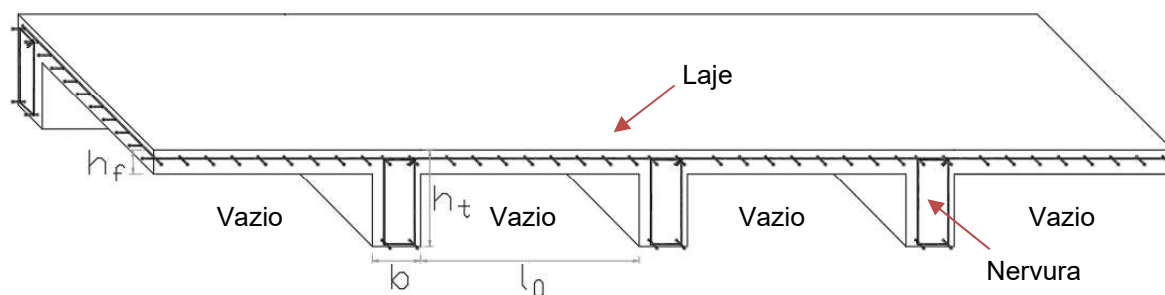
Fonte: AUTOR, 2024.

As lajes nervuradas são utilizadas normalmente em edifícios que possuam vãos grandes, tendo divisórias padronizadas com mesmos comprimentos. Esse tipo de laje é necessário para que não haja pesos próprios exorbitantes nos elementos estruturais do empreendimento, tendo um custo menor no uso do concreto e até mesmo na fundação.

Usualmente, os pisos dos edifícios de concreto armado são projetados em lajes maciças. Entretanto, quando os vãos são grandes, essa solução pode ser antieconômica, em virtude da elevada espessura da laje. Nesses casos, a solução em laje maciça pode exigir espessuras tão grandes que a maior parte do carregamento passa a ser constituída por seu peso próprio (ARAÚJO, 2014, p. 177).

Nas lajes nervuradas, as nervuras atuam como vigas, suportando a laje e distribuindo as cargas. Nos espaços entre as nervuras, chamados de vazios, podem ser utilizados diversos materiais, como EPS (isopor), blocos de concreto leve ou tijolos cerâmicos maciços. Em alguns casos, esses vazios podem ser deixados em exposição. Neste tipo de laje não há necessidade de reboco, pois suas cubetas de plástico proporcionam um bom acabamento a estrutura. As lajes nervuradas são sistemas estruturais projetados para otimizar a distribuição de cargas. Ao concentrar o concreto em nervuras, aumenta-se a altura útil da seção, o que resulta em maior rigidez e resistência à flexão. Essas nervuras podem ser dispostas em uma ou duas direções, com espaçamentos uniformes (CARVALHO & PINHEIRO, 2009). A Figura 18 ilustra um corte transversal de uma laje nervurada.

Figura 18: Corte transversal de uma laje nervurada.



Fonte: AUTOR, 2024.

3.3.1 Prescrições Normativas para Lajes Nervuradas, ABNT NBR 6118:2023.

Segundo a NBR 6118:2023, as lajes nervuradas podem ser calculadas como lajes maciças, através de processos elásticos, desde que sejam respeitadas as normas.

Quando não há tubulações horizontais embutidas, a espessura da mesa deve ser maior que $1/15$ da distância entre as nervuras (l_0) e não pode ser menor que 4 cm. Quando tiver tubulações embutidas com diâmetro menor ou igual a 10 mm, a mesa deve ter valor mínimo de 5 cm. Para tubulações maiores que 10 mm, a mesa deve respeitar a espessura mínima de 4 cm mais o diâmetro da tubulação, ou em caso

de cruzamento das tubulações deve seguir a regra de 4 cm + duas vezes o diâmetro da tubulação.

A espessura das nervuras não pode ser inferior a 5 cm, e quando as nervuras possuírem armadura de compressão, elas não podem ser inferiores a 8 cm.

Para o dimensionamento de lajes nervuradas devem ser obedecidas as seguintes condições:

- I. Para as lajes com espaçamento entre eixo de nervuras de $l_0 + b \leq 65 \text{ cm}$, pode ser dispensado às verificações de flexão da mesa. Para a verificação do cisalhamento na região das nervuras, é permitido aplicar os critérios de dimensionamento para lajes;
- II. Para as lajes com espaçamento entre nervuras com $65 \text{ cm} < l_0 + b \leq 110 \text{ cm}$, é necessário a verificação da flexão da mesa, e as nervuras devem ser verificadas aos cisalhamentos sendo consideradas como vigas. A verificação pode ser realizada como lajes caso o espaçamento entre eixos de nervuras com $65 \text{ cm} < l_0 + b \leq 90 \text{ cm}$ e a espessura das nervuras forem maiores que 12 cm;
- III. Para lajes nervuradas com espaçamento entre eixos de nervuras superior a 110, a mesa deve ser projetada como laje maciça, apoiada em grelha de vigas. As espessuras mínimas devem seguir o item 13.2.4.1 da NBR 6118:2023, que estabelece os requisitos para lajes maciças.
- IV. Os estribos das nervuras, quando necessários, não podem ter espaçamento superior a 20 cm.

3.4 FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS

A cada dia que passa a construção civil se moderniza, exigindo constante atualização em relação aos métodos de dimensionamento, incorporando programas computacionais para dimensionamento e gerenciamento de empreendimentos. Diante de um cenário com demandas cada vez mais urgentes por velocidade de projeto, torna-se ineficiente desenvolver projetos de engenharia sem o auxílio de *softwares* ou rotinas específicas (SOUZA *et al.*, 2019). Além disso, com um mundo cada vez mais tecnológico, a utilização de programas de análises de estruturas com métodos

numéricos tornou-se indispensável. Kimura (2018) comenta que, o modelo estrutural é a tentativa de simular uma estrutura real, a partir de um protótipo computacional.

Kimura (2018) aborda cinco etapas para o projeto estrutural, que são:

- I. Concepção: decisão preliminar sobre o sistema estrutural mais adequado para o empreendimento, com idealização do comportamento da estrutura real (MARTHA, 2017);
- II. Análise: determinação dos esforços internos e deformações nos elementos estruturais. Segundo Martha (2017), a análise estrutural prevê o comportamento da estrutura;
- III. Dimensionamento: definição das dimensões dos elementos estruturais para atender aos requisitos de segurança e desempenho;
- IV. Detalhamento: produção de desenhos detalhados dos elementos estruturais, com especificações de materiais, armaduras e outros detalhes construtivos;
- V. Emissão de pranchas: organização dos desenhos em pranchas para facilitar a leitura e interpretação do projeto.

A utilização dos *softwares* para análise e dimensionamento de estruturas exige conhecimentos de engenharia, física e matemática, além de familiaridade com essas ferramentas computacionais. O profissional precisa ter domínio dos princípios das análises estruturais e das funcionalidades dos *softwares* para utilizá-los de forma eficaz e obter os melhores resultados.

Lopes, Chaves e Bezerra (2018) enfatizam que a utilização consciente de *softwares* pode otimizar o dimensionamento de estruturas. O tempo antes dedicado a operações matemáticas repetitivas pode ser direcionado ao teste de diferentes soluções de projeto, buscando a melhor opção para um possível problema.

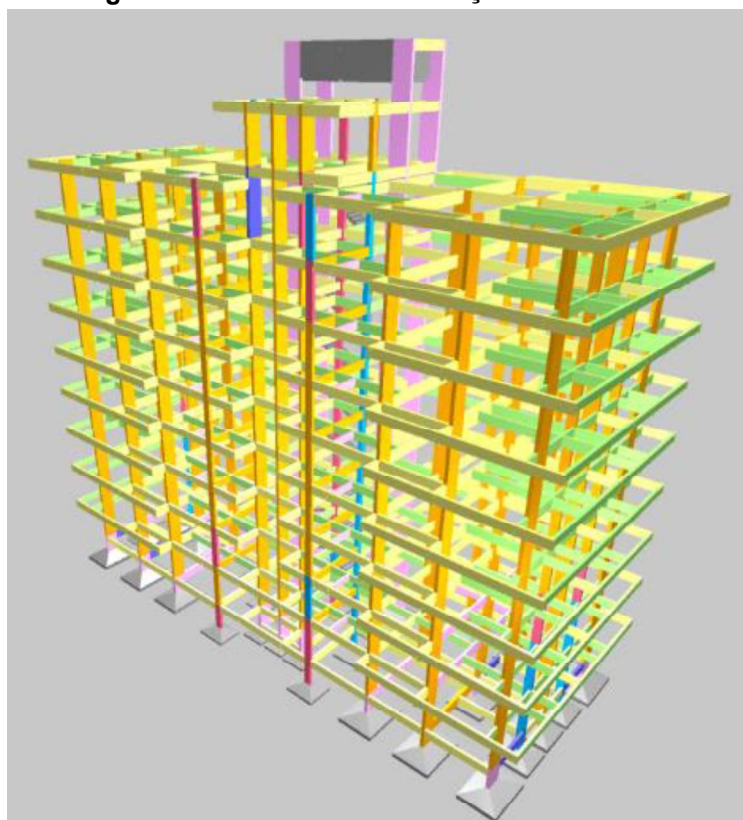
Diversos programas computacionais estão disponíveis no mercado da construção civil para auxiliar no projeto de estruturas de concreto armado. Um dos mais utilizados é o Eberick, que oferece recursos para análise de elementos estruturais, deformações, sobrecargas, detalhamentos e outros aspectos. O Eberick foi uma ferramenta essencial para a validação do *software* objeto deste estudo, o NervurasTool, que foi desenvolvido no projeto de Iniciação Científica (PIBIC), - referente ao edital 01/2023/DPP/PROPEX/IFS.

3.4.1 Eberick

O Eberick é um *software* feito para projetar estruturas em concreto armado, abrangendo sistemas moldados *in loco*, pré-moldados, alvenaria e estruturas mistas. Segundo AltoQi (2023), empresa desenvolvedora da ferramenta, o Eberick realiza diversas análises de pórticos, incluindo: o dimensionamento das peças estruturais, a compatibilização das várias áreas inclusas no projeto, geração de pranchas finais com detalhamentos de armaduras e planta de formas. No Brasil, o Eberick é uma das ferramentas computacionais mais utilizadas nos cálculos estruturais.

O *software* em questão disponibiliza ferramentas de CAD para a modelagem estrutural dos elementos de concreto armado, como pilares, vigas, lajes, escadas, fundações, reservatórios, muros de arrimo e outros. O Eberick permite a visualização do modelo em 3D (ver Figura 19), além de gráficos com as análises estruturais e tabelas com os esforços. O *software* segue as normas brasileiras para verificação do Estado Limite Último (ELU) e Estado Limite de Serviço (ELS) (AltoQi, 2023).

Figura 19: Estrutura em 3D lançada no Eberick.



Fonte: AltoQi, 2024.

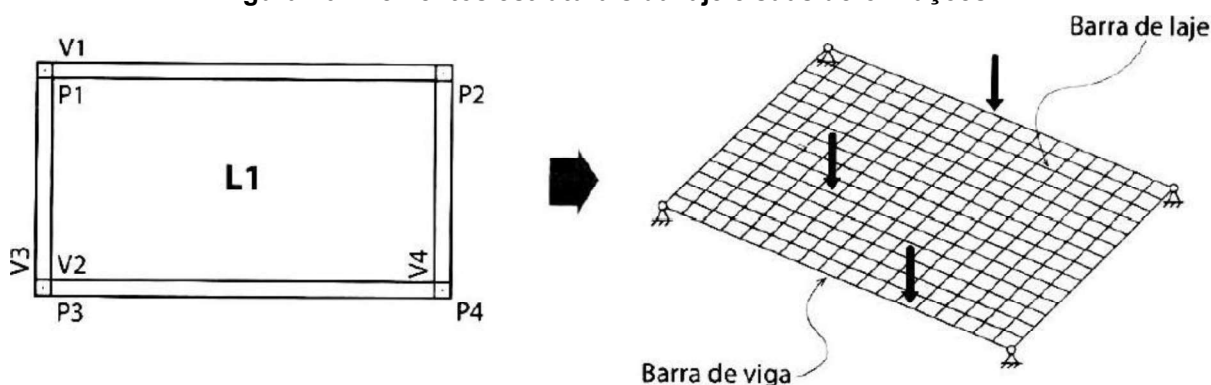
Para a realização dos cálculos de lajes o Eberick possui o modelo de analogia de grelha.

3.4.1.1 Analogia de grelha equivalente

Segundo AltoQi (2023), uma grelha é uma estrutura plana reticulada composto por elementos lineares interligados. A grelha pode receber cargas perpendiculares ao seu plano, e os esforços solicitantes podem ser determinados por métodos de estática das estruturas, como métodos dos esforços e o método dos deslocamentos (STRAMANDINOLI, 2003). No Eberick, os esforços solicitantes nas grelhas são determinados pelo método matricial da rigidez direta.

O método de analogia de grelha consiste na substituição de um pavimento por uma grelha equivalente. Essa grelha é composta por uma sequência de barras ortogonais distribuídas em um plano horizontal, representando os elementos estruturais do pavimento, como vigas e lajes. A utilização desse método considera os pilares como apoios indeformáveis (ARAÚJO, 2014). A Figura 20 mostra os elementos estruturais da laje e suas deformações.

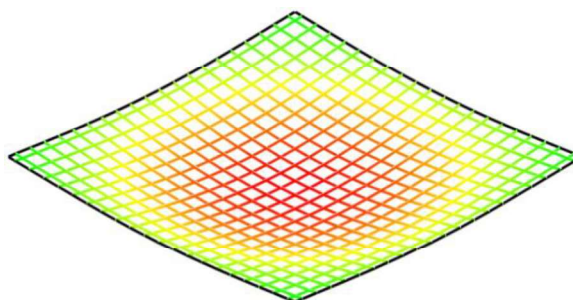
Figura 20: Elementos estruturais da laje e suas deformações.



Fonte: KIMURA, 2017.

Na Figura 21, Menezes *et al.* (2018), detalha a flecha ao longo de uma laje, evidenciando que as vigas de apoio também deformam.

Figura 21: Deformação da laje.

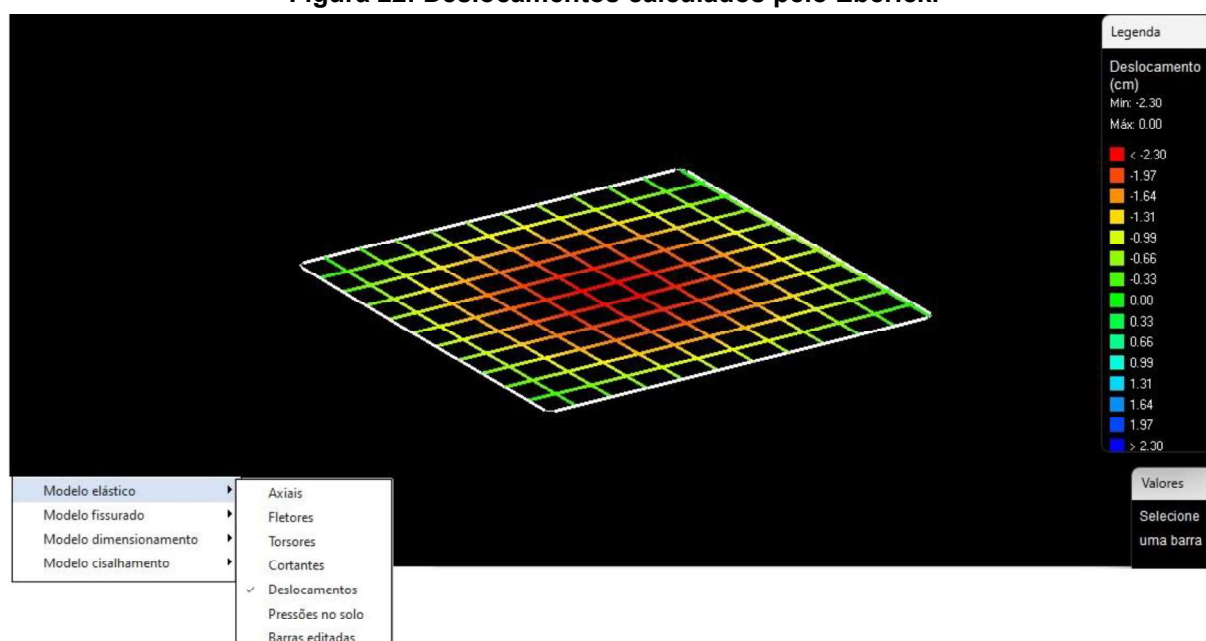


Fonte: MENEZES *et al*, 2018.

O método de grelha permite analisar as lajes poligonais e as vigas de apoio de um pavimento, possibilitando o cálculo dos esforços presentes e as considerações das vigas (ARAÚJO, 2014).

O método considera quatro esforços essenciais para os cálculos: momento torsor, momento fletor e dois esforços cortantes, a Figura 22 apresenta alguns desses esforços calculados pelo Eberick. A consideração dos deslocamentos também é fundamental (STRAMANDIOLI, 2003).

Figura 22: Deslocamentos calculados pelo Eberick.



Fonte: Eberick, 2023.

3.4.2 A linguagem utilizada no desenvolvimento do *software* objeto deste estudo

Na década de 40, o cientista Konrad Zuse desenvolveu uma das primeiras linguagens computacionais: a Plankalkul. Essa linguagem foi precursora de outras que surgiram posteriormente, e se caracterizava por códigos curtos e rápidos (SEBESTA, 2016).

Mais adiante, nas décadas de 60 e 70, o Fortran (fórmula translation) se tornou uma das linguagens computacionais mais utilizadas da época, sendo pioneira na utilização de métodos matemáticos em seus códigos (SEBESTA, 2016).

No entanto, foi nas décadas seguintes que surgiu uma das linguagens mais populares atualmente no mundo: o *Python*. O *Python* foi criado em 1991 por Guido van Rossum no Instituto Nacional de Pesquisa para Matemática e Ciência da Computação da Holanda (CWI). Atualmente, o *Python* é uma das linguagens mais

utilizadas no mundo, pois é gratuita, de fácil aprendizado e possui diversas aplicações (SILVA e SILVA, 2019).

A linguagem *Python* oferece diversas ferramentas que facilitam o desenvolvimento do código. Códigos escritos em *Python* podem ser executados em outras linguagens, bastando compilá-los. Além disso, a linguagem possui uma ampla variedade de bibliotecas que auxiliam no desenvolvimento de diferentes tipos de códigos (BURIOL e ARGENTA, 2009).

O *software* objeto deste estudo utilizou a linguagem de programação *Python* e o método implementado para o cálculo das deformações da laje foi a teoria de flexão das placas.

3.4.2.1 Teoria de flexão de placas

A teoria de flexão de placas é baseada na lei de Hooke, que afirma que um material deformado por uma força elástica retorna à sua forma original quando a força cessa, desde que o regime de deformação seja linear-elástico (ARAÚJO, 2014). Segundo Carvalho *et al.* (2009), essa teoria se aplica quando as “equações de equilíbrio para um elemento infinitesimal de placa e as compatibilidades das deformações dos mesmos” são satisfeitas. A teoria de flexão de placas também se aplica quando o material tem as propriedades mecânicas homogêneas.

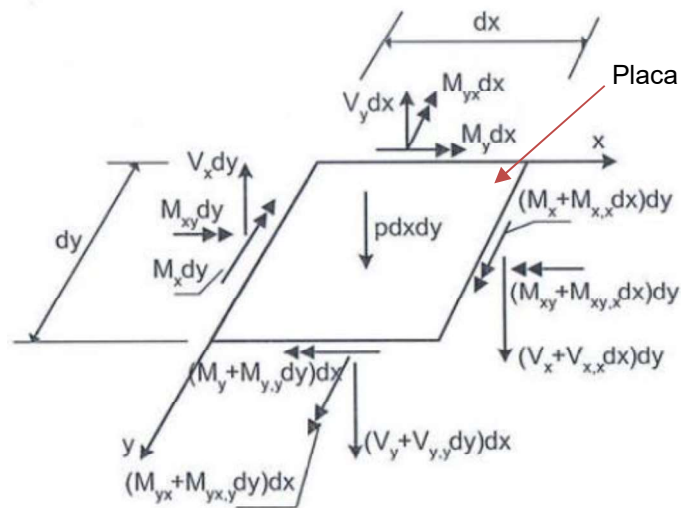
Carvalho e Figueiredo (2013) argumentam que para o melhor entendimento, as condições de contorno na determinação dos esforços, é necessário considerar as seguintes atribuições:

- Ações das placas sobre as vigas serão apenas os esforços verticais, não havendo momento torsor nas vigas;
- As ações das placas para as vigas são igualmente distribuídas. Tais esforços são então passados para os pilares;
- As placas podem sofrer rotação em seu contorno (apoio simples) ou serem impedidas de rotação (engastamento). As vigas, por sua vez, não sofrem deslocamento na direção vertical.

A Figura 23 mostra o plano médio do elemento de placa e os esforços solicitantes que garantem o equilíbrio da placa. As equações de equilíbrio presentes na figura asseguram a estabilidade da placa, garantindo que as forças e momentos

atuantes se anulem. As equações específicas incluídas nesse equilíbrio são: equilíbrio de momento em torno do eixo x, equilíbrio de momento em torno do eixo y e equilíbrio de forças na direção de z (ARAÚJO, 2014).

Figura 23: Equilíbrio do elemento de placa.



Fonte: ARAÚJO, 2014, adaptado.

Realizando os cálculos algébricos com base nas equações da figura acima, obtém-se a equação das placas, também conhecida como equação de Lagrange (Equação 07). Essa equação é aplicável apenas a placas com rigidez à flexão constante, apresentando uma equação diferencial parcial de quarta ordem e não homogênea, aplicada para o equilíbrio em um elemento infinitesimal (ARAÚJO, 2014).

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{-p(x,y)}{D} \quad (\text{Equação 07})$$

Onde:

w é o campo de deslocamentos verticais;

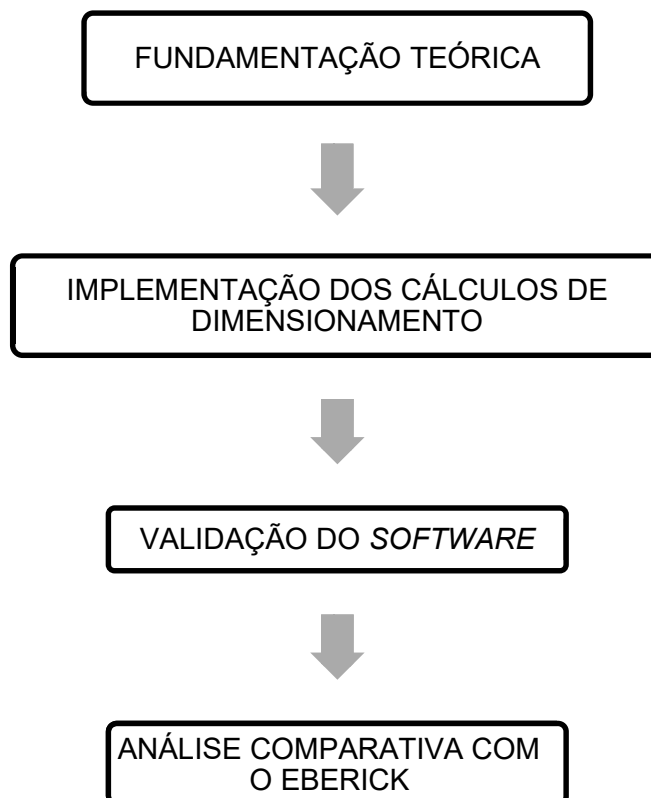
D é a rigidez à flexão de uma placa, dada pela equação 10.

4 METODOLOGIA

Neste trabalho foi avaliada a eficiência de um *software* acadêmico, o NervurasTool, desenvolvido para o dimensionamento de lajes nervuradas em concreto armado do tipo isotrópica, com isso, os resultados obtidos foram comparados com os valores do *software* Eberick 2023. O *software* foi desenvolvido seguindo o roteiro de cálculo apresentado por Araújo (2014). As análises feitas no *software* foram através de um exemplo do livro “Curso de Concreto Armado” – volume 4” de Araújo (2014), e foram feitas ainda análises comparativas de lajes com vão variando entre 7m e 9 m. É importante salientar que esses comprimentos de vãos foram escolhidos por corresponderem as situações possíveis e viáveis para o emprego de lajes nervuradas. Para comparação dos resultados foi utilizada a ferramenta computacional AltoQi Eberick 2023.

O desenvolvimento do NervurasTool, segundo o projeto do PIBIC (2023), seguiu o fluxograma da Figura 24 abaixo, incluindo nele um objetivo deste estudo.

Figura 24: Desenvolvimento do trabalho.



Fonte: AUTOR, 2024.

4.1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Como parte inicial, foi realizado um estudo bem detalhado dos conceitos fundamentais, características e normas relacionadas ao dimensionamento de lajes nervuradas, com o objetivo de adquirir embasamento teórico que possibilite melhor compreensão dos princípios necessários para o correto modo de cálculo desses elementos estruturais.

4.1.1 Conceitos Básicos para o Projeto de Lajes Nervuradas

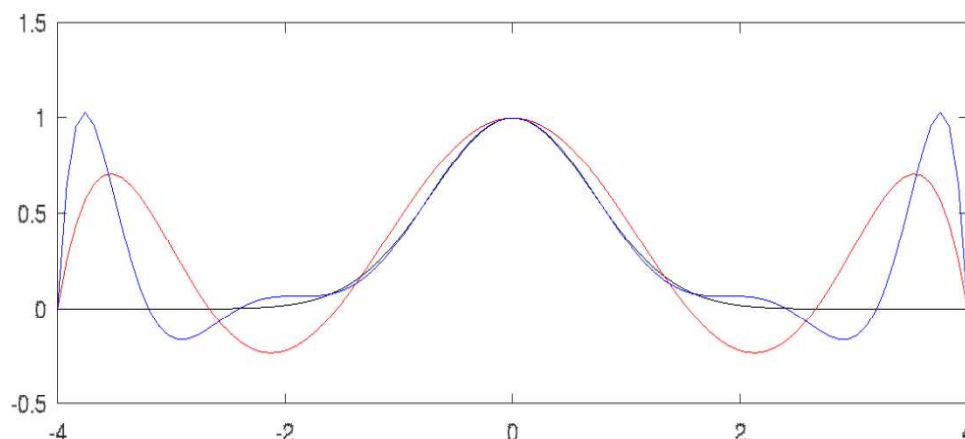
Essa etapa teve como objetivo encontrar as fontes mais relevantes e que tragam os conceitos essenciais para o dimensionamento das lajes nervuradas, mostrando quando o modelo estrutural é mais econômico e mais eficiente, evidenciando assim as normas técnicas que são aplicáveis no dimensionamento das lajes nervuradas, como a NBR 6118:2023 – Projeto de Estruturas de Concreto.

Por fim, o conhecimento da parte teórica foi fundamental para a validação do NervurasTool. Os cálculos realizados seguiram as prescrições normativas e o roteiro de cálculo de Araújo (2014).

4.1.2 Interpolação Numérica

Pelo exposto no relatório do PIBIC (2023), na aplicação do código na ferramenta *Python* foi essencial a utilização da interpolação numérica, para obter resultados mais precisos e parecidos com os valores reais, utilizando os tipos de interpolações, como: *spline* cúbico, interpolação linear e interpolação polinomial de ordem elevada. Esses métodos foram usados para estimar valores intermediários de acordo com as tabelas de dimensionamento de lajes nervuradas, com o objetivo de eliminar o efeito *Runge*, que é a oscilação das bordas do intervalo. A Figura 25 apresenta um caso de demonstração desse aspecto do efeito *Runge*.

Figura 25: Gráfico com uma função polinomial e^{-x^2} , interpolado de grau 6° e grau 10°.



Fonte: BEATRIZ, 2022.

4.1.3 Utilização da Linguagem de Programação

Foi utilizado a linguagem de programação *Python* por ser uma ferramenta universal e de fácil acesso, com uma grande popularidade e flexibilidade computacional, e com uma ampla biblioteca de funções. Além disso, trata-se de uma ferramenta gratuita e de um aprendizado rápido.

4.2 FUNCIONALIDADE E IMPLEMENTAÇÃO DOS CÁLCULOS DE DIMENSIONAMENTO NO SOFTWARE

O *software* objeto deste estudo se destaca por sua dinâmica intuitiva, permitindo que o usuário obtenha resultados precisos no dimensionamento de lajes nervuradas. Ao usuário basta inserir os dados de entrada para cada etapa do processo, garantindo um dimensionamento confiável e em conformidade com as normas.

O NervurasTool segue rigorosamente as prescrições normativas para lajes nervuradas, conforme estabelecidas no item 14.7.7 da NBR 6118:2023. Além disso, utiliza como referência o roteiro de cálculo detalhado apresentado em Araujo (2014), reconhecido especialista na área.

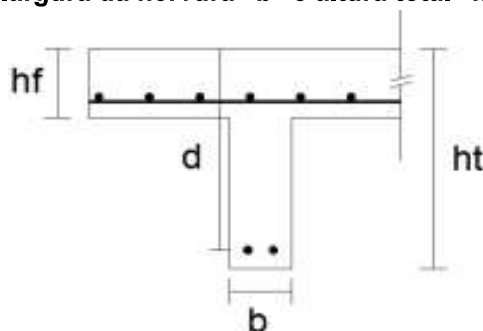
O roteiro de cálculo aborda as seguintes etapas:

I. Pré-dimensionamento da laje nervurada

O pré-dimensionamento da laje nervurada foi feito inicialmente definindo a distância entre o centro das armaduras de aço longitudinais de tração, que se

encontram nas nervuras, até a borda mais comprimida da laje – altura útil (d). A Figura 26 ilustra essa distância.

Figura 26: Laje nervurada – características geométricas (altura útil “d”, espessura da laje “hf”, largura da nervura “b” e altura total “ht”).



Fonte: AUTOR, 2023.

O valor de “d” é calculado a partir da Equação 8. Após a definição de “d”, encontra-se a altura total da laje, que é feita através da Equação 9.

$$d = \frac{\text{vão menor}}{30} \quad (\text{Equação 08})$$

$$h_t = d + \frac{\varnothing}{2} + c_n \quad (\text{Equação 09})$$

Onde:

$\varnothing$ - É o diâmetro da armadura de aço (normalmente adota-se um diâmetro de 10 mm);

c_n - É o cobrimento nominal, que é estabelecido pela Tabela 1, disposto na NBR 6118:2023.

Tabela 1: Correspondência entre a classe de agressividade ambiental e o cobrimento nominal.

Tipo de Estrutura	Componente ou elemento	Classe de agressividade ambiental			
		I	II	III	IV
		Cobrimento nominal (mm)			
Concreto armado	Laje	20	25	35	45
	Viga/pilar	25	30	40	50
	Elementos estruturais em contato com o solo	30		40	50
Concreto protendido	Laje	25	30	40	50
	Viga/pilar	30	35	45	55

Fonte: NBR 6118:2023, adaptado.

II. Carregamentos da laje nervurada

Nesse procedimento são realizados os cálculos para a obtenção do carregamento que a laje nervurada recebe. Os carregamentos são de duas naturezas: as cargas permanentes (G) e as cargas acidentais (Q).

As cargas permanentes são aquelas que atuam continuamente na laje, como: o peso próprio da laje, o peso das paredes sobre a laje, o peso dos revestimentos cerâmicos e o peso do material de preenchimento (caso tenha algum material de preenchimento), conforme NBR 6118:2023 (item 11.3).

O valor da carga acidental é estabelecido através da Tabela 10 da NBR 6120:2019, que determina as cargas para cálculo de estruturas de edificações, em função das suas finalidades.

III. Verificação da Flecha

A verificação da flecha é um procedimento importante para avaliar o comportamento da laje quanto a rigidez à flexão.

A rigidez equivalente da laje (D_e) é dada pela Equação 10. Essa rigidez corresponde a rigidez de uma laje maciça de espessura (h_e) equivalente à laje nervurada, o cálculo de (h_e) é feito através da Equação 11.

$$D_e = \frac{E_{cs} \cdot h_e^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \quad (\text{Equação 10})$$

$$h_e = \left[(1 - \xi) h_t^3 + \xi h_f^3 \right]^{\frac{1}{3}} \quad (\text{Equação 11})$$

Onde:

$\nu = 0,2$ é o coeficiente de Poisson do concreto;

E_{cs} – É o módulo secante dado na Equação 6.

Para a verificação da rigidez é preciso obter a flecha inicial (ω_0), que é estabelecida pela Equação 12, com a finalidade de garantir que a laje não sofra deformações excessivas, através de carregamentos quase permanentes.

$$\omega_0 = 0,001 \cdot \omega_c \cdot \frac{P_0 \cdot L_x^4}{D_e} \quad (\text{Equação 12})$$

Onde:

ω_c – é estabelecido pela Tabela A2.1 de Araújo (2014) – Ver Anexo 1.

O cálculo dos carregamentos quase permanentes (P_0) é realizado através da soma de todas as cargas permanentes (G) presente na laje nervurada mais um fator de redução ψ_2 de cargas acidentais (Q), conforme ilustra a Equação 13. O fator de redução ψ_2 é estabelecido através da NBR 8681:2003.

$$P_0 = G + \psi_2 \cdot Q \quad (\text{Equação 13})$$

A Tabela 2, apresenta os fatores de redução para ações variáveis.

Tabela 2: Fatores de combinação de redução para ações variáveis.

Ações Variáveis	ψ_1	ψ_2
Variações uniformes de temperatura;	0,5	0,3
Pressão dinâmica do vento;	0,3	0
Cargas acidentais dos edifícios quando não há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos nem de elevadas concentrações de pessoas (edifícios residenciais);	0,4	0,3
Cargas acidentais dos edifícios, nos casos contrários (edifícios comerciais e de escritórios);	0,6	0,4
Cargas acidentais em bibliotecas, arquivos, oficinas e garagens	0,7	0,6

Fonte: NBR 8681:2003, adaptado.

Dando continuidade na verificação da rigidez da laje nervurada, calcula-se a flecha final (ω_∞), através da Equação 14, que tem por objetivo determinar o máximo de deformação estimada que a laje sofre. O valor da flecha final deve ser menor ou igual ao valor da flecha máxima admissível estabelecido pela NBR 6118:2023 (Tabela 13.3). O valor da flecha máxima admissível é encontrado através da divisão do vão menor por 250.

$$\omega_\infty = (1 + \varphi_0) \cdot \omega_0 \quad (\text{Equação 14})$$

Onde:

φ_0 – Coeficiente de fluência, admitido com o valor de 2,5.

IV. Cálculo das armaduras longitudinais

No cálculo das armaduras longitudinais, são obtidos os momentos fletores nas direções x e y de cada nervura. Em seguida, é feito o dimensionamento da armadura em uma seção “T” (seguindo o procedimento de Araújo (2014)) para se calcular a área de aço longitudinal desta seção. Logo, a definição da área de aço efetiva (A_{sef}), que é o melhor arranjo da quantidade de armaduras longitudinais para as nervuras, pode ser estabelecida através da Tabela A3.2 de Araújo (2014) – Ver Anexo 2.

V. Armadura da Mesa

- Para nervuras com $l_0 + b \leq 65$ cm

Neste caso, pode ser utilizada a área de aço mínima para a armadura da mesa, que corresponde a área de mínima de aço de uma laje maciça de espessura (h_f) simplesmente apoiada.

- Para nervuras com $65 < l_0 + b \leq 110$ cm

Nesta situação deve ser verificada a resistência da mesa à flexão. As armaduras da mesa devem ser dimensionadas como uma laje maciça de espessura (h_f), simplesmente apoiada nas nervuras, esses cálculos devem ser feitos nas duas direções em planta (x e y) – Ver Figura 28.

VI. Verificação do cortante nas nervuras

- Para as nervuras com $l_0 + b \leq 65$ cm

As nervuras com dimensões inferiores ou iguais a 65 cm podem ser verificadas ao cisalhamento usando os critérios de lajes. Diante disso, os estribos poderão ser desconsiderados se atender o que está disposto na NBR 6118:2023 (item 19.4.1), relacionando que a tensão convencional de cisalhamento (τ_{wd}) deve ser menor ou igual à tensão limite em função da resistência do concreto (τ_{wu1}). As tensões são calculadas de acordo com as Equações 15 e 16, respectivamente.

$$\tau_{wd} = \frac{V_d}{bd} \quad (\text{Equação 15})$$

$$\tau_{wu1} = k(1,2 + 40\rho_i) \cdot 0,038 \cdot (f_{ck})^{\frac{2}{3}} \quad (\text{Equação 16})$$

Onde:

V_d – É a reação das nervuras multiplicado por um coeficiente de majoração (foi utilizado o valor de 1,4);

$k = 1,6 - d$, sendo d em metros;

$$\rho_i = \left(\frac{A_s}{bd} \right).$$

- Para as nervuras com $65 < l_0 + b \leq 110$ cm

No caso de as nervuras serem superiores a 65 cm, as nervuras devem ser verificadas ao cisalhamento como vigas. Assim, será obrigatório o uso de estribos. Com isso, deve ser verificado se há o esmagamento das bielas, fazendo a comparação dos valores da tensão convencional de cisalhamento (τ_{wd}) e a tensão limite em função da resistência do concreto, sob cisalhamento direto (τ_{wu2}), representada pela Equação 17. Após a verificação, é necessário calcular a tensão de cisalhamento do concreto (τ_c), que é um fator de redução apresentado na Equação 18. Por fim, tem-se o (τ_d) que serve para o cálculo da armadura transversal, apresentado na Equação 19.

$$\tau_{wu2} = 0,27 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) \cdot f_{cd} \quad (\text{Equação 17})$$

$$\tau_c = \psi_3 \cdot f_{ck}^{\frac{2}{3}} \quad (\text{Equação 18})$$

$$\tau_d = 1,11(\tau_{wd} - \tau_c) \quad (\text{Equação 19})$$

Onde:

ψ_3 - é um coeficiente definido a partir da Tabela 3.

Tabela 3: Definição dos valores do coeficiente ψ_3 .

Ações	Valores de ψ_3
Na flexão simples e na flexo-tração com a linha neutra cortando a seção;	$\psi_3 = 0,09$
Na flexo-compressão;	$\psi_3 = 0,09 \left(1 + \frac{M_0}{M_d} \right) \leq 0,18$
Na flexo-tração com a linha neutra fora da seção.	$\psi_3 = 0$

Fonte: ARAÚJO (2014).

A partir dos valores encontrados acima, calcula-se a área de aço dos estribos (A_{sw}) e a área de aço mínima dos estribos ($A_{sw,mín}$), dessa forma, a área de aço adotada deve ser a maior das duas. As áreas A_{sw} e $A_{sw,mín}$ são encontradas de acordo com as Equações 20 e 21, respectivamente. Logo, a definição da área de aço efetiva (A_{sef}), que é o melhor arranjo da quantidade de estribos nas nervuras, foi estabelecida através da Tabela A3.3 de Araújo (2014) – Ver Anexo 3. De acordo com a NBR 6118:2023, os estribos das nervuras, quando necessários, devem ter o espaçamento máximo de 20 cm.

$$A_{sw} = 100 \cdot b \cdot \frac{\tau_d}{f_{yd}} \quad (\text{Equação 20})$$

$$A_{sw,mín} = \rho_{mín} \cdot 100 \cdot 10 \quad (\text{Equação 21})$$

O valor da taxa mínima de armadura de aço $\rho_{mín}$ é apresentado abaixo pela Tabela 4.

Tabela 4: Valores da taxa de armadura mínima para aço CA-50 de acordo com algumas classes de concreto, para valores de $d/h = 0,80$.

$f_{ck} \text{ (MPa)}$	20	25	30	35	40	45	50
$\rho_{mín}$	0,09	0,10	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16

Fonte: ARAÚJO (2014).

- Para as nervuras com $65 < l_0 + b \leq 90$ cm

Nesta situação será permitido a verificação como laje, se a espessura média das nervuras for maior que 12 cm.

VII. Ancoragem das armaduras nos apoios

Essa etapa é necessária para dimensionar o comprimento das barras longitudinais, pois é preciso garantir que a barra embutida no concreto tenha o comprimento necessário para transferir o esforço da barra para o concreto que a envolve. Dessa forma, é feito o cálculo do comprimento de ancoragem necessário ($l_{b,nec}$), que é dado pela Equação 22.

$$l_{b,nec} = l_b \frac{A_{s,cal}}{A_{sef}} \geq l_{b,mín} \quad (\text{Equação 22})$$

Contudo, o valor de $(A_{s,cal})$, que é a área de aço de cálculo, e o (l_b) , que é o comprimento básico de ancoragem, ambos são encontrados através das Equações 23 e 24, respectivamente.

$$A_{s,cal} = \frac{a_l}{d} \cdot \frac{V_d}{f_{yd}} \quad (\text{Equação 23})$$

$$l_b = \frac{\phi}{4} \cdot \frac{f_{yd}}{f_{bd}} \quad (\text{Equação 24})$$

Onde:

$a_l/d = 1,5$ para lajes sem armadura de cisalhamento;

f_{bd} – É a tensão/resistência de cálculo de aderência, encontrada a partir da Equação 25.

$$f_{bd} = k \cdot 0,42(f_{cd})^{\frac{2}{3}} \quad (\text{Equação 25})$$

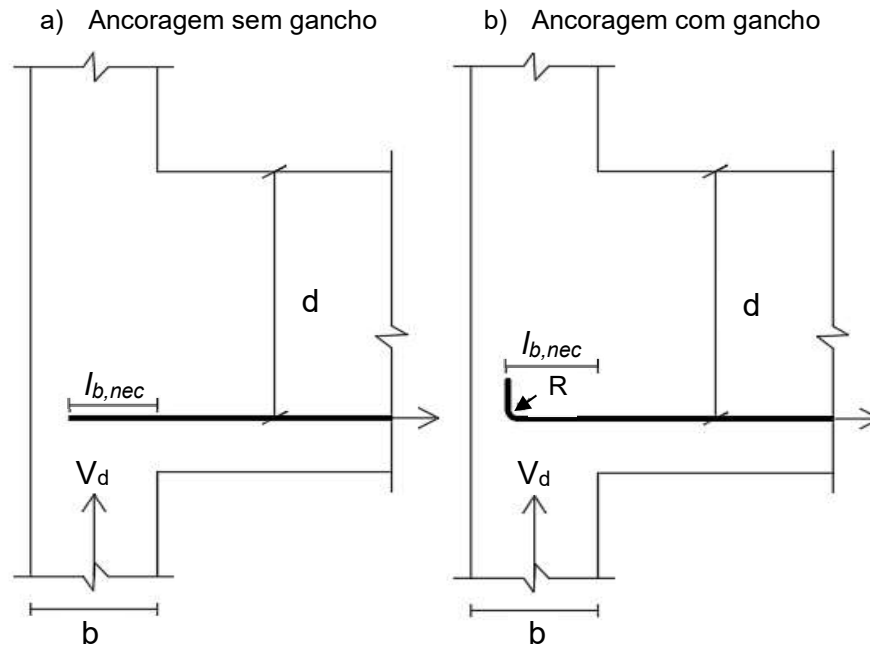
Com os valores de $k = 1,0$ para barras nervuradas, $k = 0,62$ para barras entalhadas e $k = 0,44$ para barras lisas.

A NBR 6118:2023 estabelece um comprimento mínimo $(l_{b,min})$ para a ancoragem das barras, através da Equação 26.

$$l_{b,min} \geq \begin{cases} 0,3l_b \\ 10\phi \\ 10cm \end{cases} \quad (\text{Equação 26})$$

Caso o comprimento de ancoragem necessário $(l_{b,nec})$ comprometa o cobrimento mínimo, será necessário realizar dobras (conhecidas como ganchos) nas extremidades das barras, como ilustra a Figura 27 (b).

Figura 27: Dois tipos de Ancoragem em apoio de extremidade, um sem gancho (a) e o outro com gancho (b).



Fonte: ARAÚJO (2014), adaptado.

VIII. Armaduras de canto

Armaduras de canto são calculadas a partir do momento torsor nos cantos M_{xy} , calculado através da Equação 27.

$$M_{xy} = 0,001 \cdot m_{xy} \cdot P \cdot L_x^2 \quad (\text{Equação 27})$$

Onde:

m_{xy} – É estabelecido através da tabela A.2.1 de Araújo (2014) - Ver Anexo 1.

Após encontrar o momento torsor (M_{xy}), é necessário encontrar o momento torsor em cada nervura ($M_{xy,nervura}$), o cálculo é feito pela Equação 28.

$$M_{xy,nervura} = (l_0 + b) \cdot M_{xy} \quad (\text{Equação 28})$$

O dimensionamento da área de aço para os cantos da laje (A_{sxy}), é calculado através da Equação 29.

$$A_{sxy} = w_{xy} \cdot b \cdot d \cdot \frac{\sigma_{cd}}{f_{yd}} \quad (\text{Equação 29})$$

Onde:

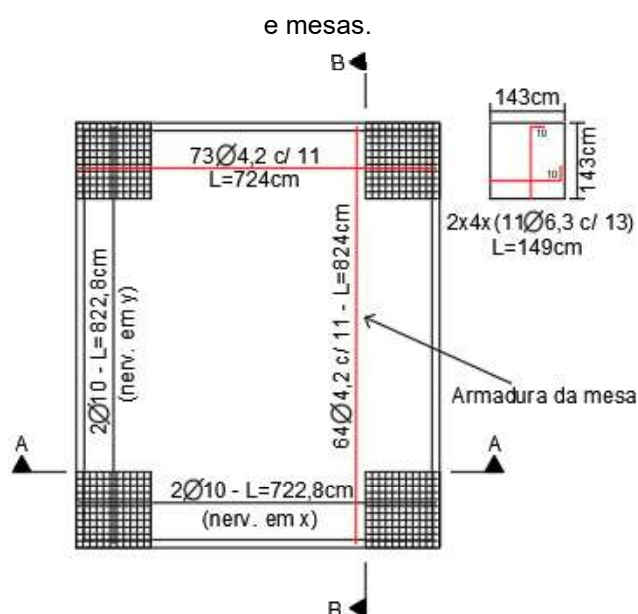
w_{xy} – É estabelecido através da tabela A.2.1 de Araújo (2014) - Ver Anexo 1.

Consequente os valores das áreas de aço dos cantos da laje nervurada, é necessário verificar a necessidade de ajustar a armadura longitudinal das nervuras.

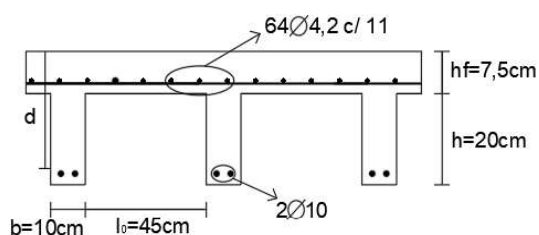
Ao final do roteiro de cálculo, é essencial executar o detalhamento da laje calculada. Este detalhamento segue normalmente com dois cortes transversais e uma planta de armação, ambos dispostos com as informações da quantidade de barras e o seu diâmetro para cada direção. A Figura 28 exemplifica um modelo de apresentação do detalhamento de uma laje nervurada.

Figura 28 – Representação do detalhamento de uma laje nervurada.

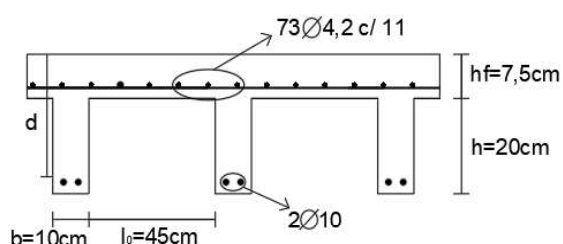
a) Planta baixa – armação longitudinal de nervuras



b) Corte AA.



c) Corte BB.



Fonte: AUTOR, 2024.

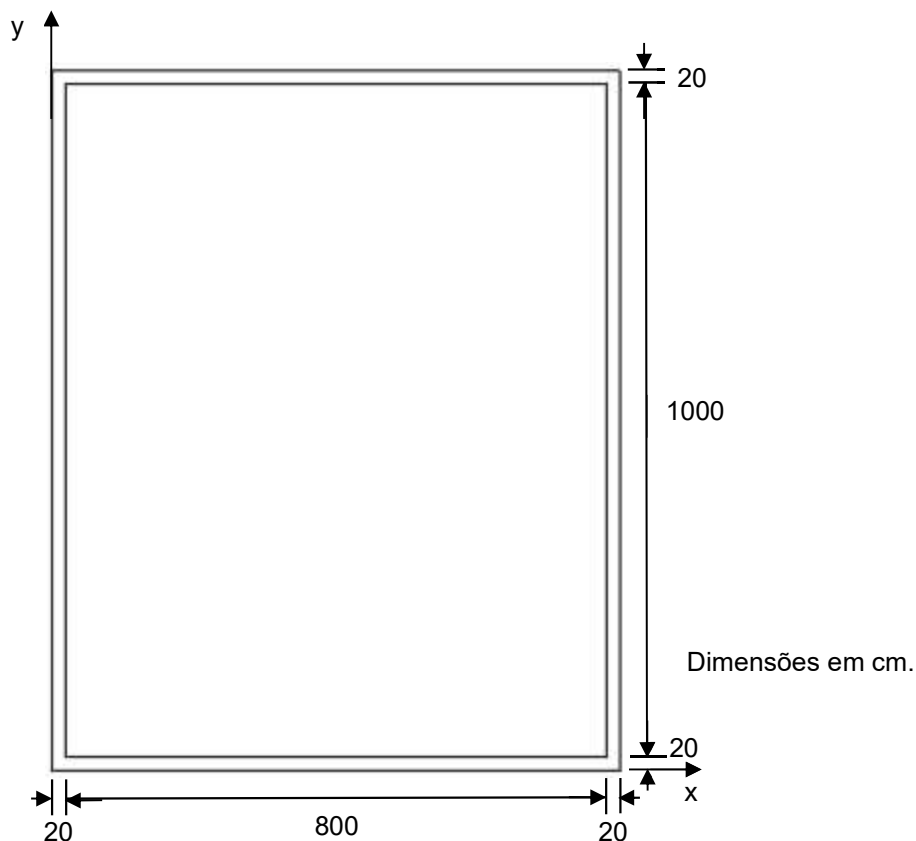
4.3 VALIDAÇÃO DO SOFTWARE

a) Cálculo de validação através do roteiro de Araújo (2014)

A fim de comprovar a eficácia do programa desenvolvido em *Python*, como produto do projeto de pesquisa PIBIC referente ao edital 01/2023/DPP/PROPEX/IFS, realizou-se um procedimento de validação utilizando um exemplo prático extraído do livro "Curso de Concreto Armado" – volume 4 de Araújo (2014). Nesse exemplo, é proposto o projeto de uma laje nervurada com vãos livres entre as nervuras preenchidos com blocos de isopor. Ao comparar os resultados obtidos pelo

NervurasTool com a solução apresentada no livro, foi possível avaliar a precisão e confiabilidade do método de cálculo implementado. Na Figura 29 são mostradas as dimensões em planta baixa da laje nervurada considerada no exemplo acima descrito.

Figura 29 – Planta de forma da laje nervurada de Araújo (2014).



Fonte: ARAÚJO, 2014, adaptado.

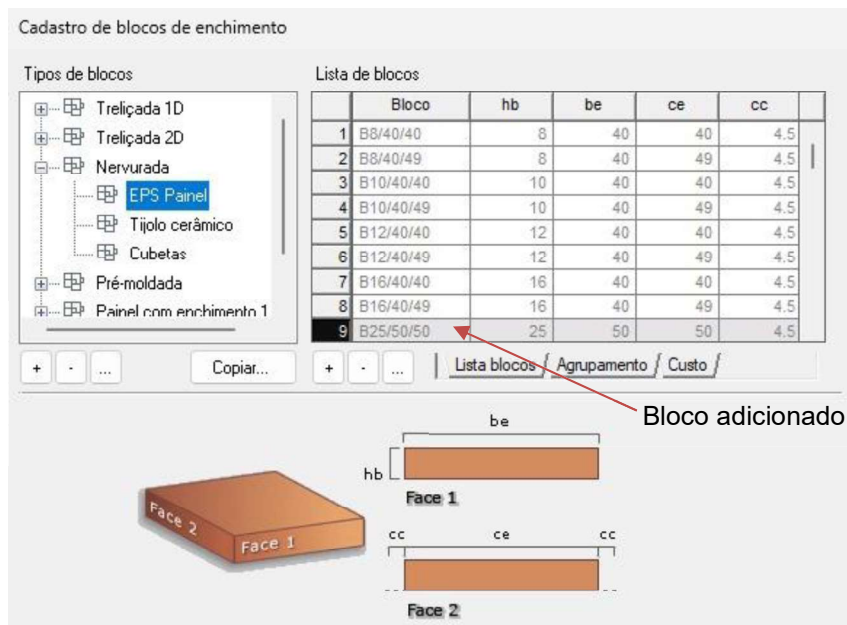
b) Comparativo com o *Software* Eberick

Com a finalidade de aprimorar o processo de testes dos resultados gerados pelo NervurasTool, foi realizada uma análise comparativa com o AltoQI Eberick 2023, ferramenta de referência no mercado da construção civil. Para tanto, o exemplo da laje nervurada com preenchimento de isopor, previamente utilizado para validar o *software* desenvolvido, foi modelado no Eberick. Seguindo as diretrizes do exemplo citado no item a, foram executados os seguintes passos:

- I. Adicionou-se no Sistema do Eberick o bloco de enchimento solicitado pelo exercício, inserindo-o na aba blocos de enchimento do *software*. A Figura 30 mostra o cadastro do bloco de enchimento na parte de laje nervurada, com os valores solicitados no exercício e ilustra também o

seu formato (EPS Painei, ou seja, as nervuras são preenchidas com blocos de isopor).

Figura 30 – Cadastro do bloco de enchimento e ilustração do formato da nervura.



Fontes: Eberick, 2024.

Onde:

hb – Altura da nervura;

be – Distância entre os eixos centrais das nervuras da face 1;

ce – Distância entre os eixos centrais das nervuras da face 2;

cc – Representa a metade da largura da nervura transversal a face 2.

- II. Após a etapa anterior, adicionou-se os valores das cargas. A Figura 31 mostra um caso de inserção dos valores de carga do Eberick, cujos valores foram retirados do exemplo citado acima, no qual, foi solicitada uma carga acidental de 2 kN/m^2 , uma carga de revestimento de 1 kN/m^2 e foi incluída uma carga de 1 kN/m^2 , referente as paredes, considerada no lançamento como carga extra.

Figura 31 – Valores adicionados para o cálculo da laje nervurada.

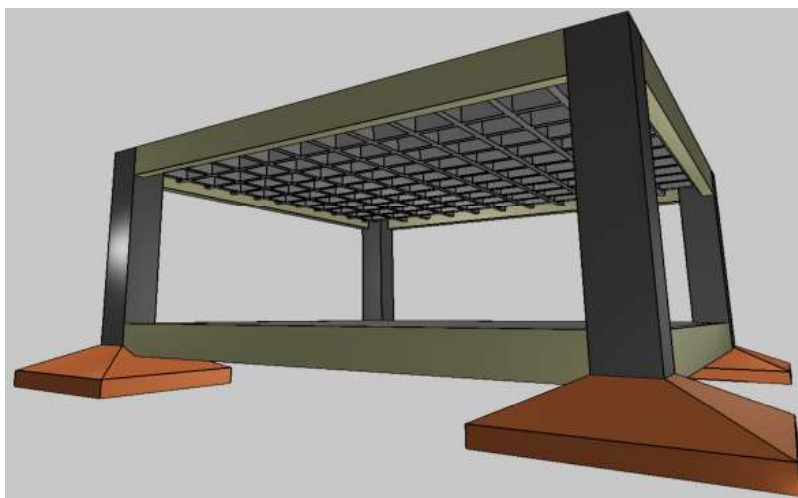
Fontes: Eberick, 2024.

Onde:

- ec – Espessura da mesa da laje;
- ee – Altura da nervura;
- enx – Largura da nervura na direção de x;
- eny – Largura da nervura na direção de y;

III. Para realizar os cálculos da laje nervurada, foi adicionada uma fundação. Além disso, foram inseridos pilares e vigas para o lançamento da laje nervurada. A Figura 32 apresenta a estrutura em 3D com os elementos estruturais adicionados. É importante destacar que os elementos não mencionados no exemplo original foram dimensionados de forma conservadora para evitar possíveis erros.

Figura 32 – Estrutura em 3D do pórtico a partir dos elementos estruturais adicionados.



Fonte: AUTOR, 2024.

Com o intuito de ampliar o escopo da análise e comprovar a eficiência do NervurasTool em diferentes configurações, foram considerados outros três projetos de lajes nervuradas. As lajes serão analisadas em duas configurações de espaçamento entre eixo de nervuras: superior a 65 cm e inferior a 65 cm. Os projetos são:

- Dimensionamento de uma laje nervurada de 700 cm x 700 cm;
- Dimensionamento de uma laje nervurada de 800 cm x 800 cm;
- Dimensionamento de uma laje nervurada de 900 cm x 900 cm.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção serão apresentados os resultados das análises estruturais que foram realizadas com o intuito de validar o *software* NervurasTool. Essas análises tiveram como referência o exemplo 6.4 do livro ‘Curso de Concreto Armado’ – volume 4 de Araújo (2014). A partir dos resultados obtidos foram realizadas comparações com a ferramenta computacional AltoQi Eberick 2023.

5.1 RESULTADOS DA VALIDAÇÃO DO SOFTWARE

O exemplo 6.4 do livro ‘Curso de Concreto Armado’ de Araujo (2014) pede que seja projetada uma laje nervurada (indicada na Figura 29), considerando os espaços entre as nervuras com material de enchimento sendo blocos de isopor. A laje é piso de salas de escritórios, admitindo-se nela, entre outras, uma carga correspondente ao peso das paredes divisórias de $1,0 \text{ kN/m}^2$. As vigas laterais de apoio têm 20 cm de largura. O concreto possui uma resistência característica à compressão (f_{ck}) de 25 MPa e foi admitido o emprego do aço CA-50.

Dados: $l_0 + b = 60 \text{ cm}$; $l_0 = 50 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm}$ e $h_f = 5 \text{ cm}$.

A Tabela 5 resume os resultados das análises realizadas para o exemplo 6.4, comparando os valores obtidos pelo NervurasTool com os resultados apresentados por Araújo (2014), e aqueles gerados pelo *software* comercial Eberick. Essa tabela permite uma análise comparativa dos diferentes métodos, considerando as vigas com as seguintes dimensões: 20 cm de largura e 50 cm de altura – Ver Apêndice A.

Tabela 5 – Resultados do exemplo 6.4 para viga de 20 cm x 50 cm.

Processo de cálculo	Peso Total (kN/m ²)	Flecha Final (cm)	Momento Fletor Mx (kNm/m)	Momento Fletor My (kNm/m)	Asx (cm ² /nervura)	Asy (cm ² /nervura)
NervurasTool (*)	7,1597	2,8668	29,9841	21,4840	2,1879	1,5588
Araújo (2014)	7,16	2,87	30,19	21,47	2,25	1,59
Eberick	7,19	4,77	39,72	35,07	3,10	2,84

*Obs.: O emprego de maior número de casas decimais nos valores correspondentes ao NervurasTool buscou reproduzir com fidelidade os dados de saída do *software*.

Fonte: Autor, 2024.

Os resultados do cálculo obtido pelo Eberick indicaram flechas finais superiores ao limite de $L/250$ estabelecido pela NBR 6118:2023, divergindo significativamente dos demais processos de cálculo. Para atender aos requisitos normativos e obter resultados mais coerentes, a estrutura foi enrijecida com o aumento das dimensões das vigas e dos pilares. Os resultados da configuração final, com pilares quadrados de 50 cm e vigas com seção quadrada de 50 cm, são apresentados na Tabela 6 – Ver Apêndice B.

Tabela 6 – Resultados do exemplo 6.4 para viga de 50 cm x 50 cm.

Processo de cálculo	Peso Total (kN/m ²)	Flecha Final (cm)	Momento Fletor Mx (kNm/m)	Momento Fletor My (kNm/m)	Asx (cm ² /nervura)	Asy (cm ² /nervura)
NervurasTool (*)	7,1597	2,8668	29,9841	21,4840	2,1879	1,5588
Araújo (2014)	7,16	2,87	30,19	21,47	2,25	1,59
Eberick	7,19	4,19	42,09	32,79	3,29	2,51

Fonte: Autor, 2024.

A configuração otimizada, com pilares de 70 cm e vigas de 70 cm x 80 cm, foi a escolhida após diversas análises. Essa configuração garante o cumprimento do limite de flecha final $L/250$ estabelecido pela NBR 6118:2023 e apresenta resultados de flechas mais próximos dos demais métodos, como mostra a Tabela 7 – Ver Apêndice C.

Tabela 7 – Resultados do exemplo 6.4 para viga de 70 cm x 80 cm.

Processo de cálculo	Peso Total (kN/m ²)	Flecha Final (cm)	Momento Fletor Mx (kNm/m)	Momento Fletor My (kNm/m)	Asx (cm ² /nervura)	Asy (cm ² /nervura)
NervurasTool (*)	7,1597	2,8668	29,9841	21,4840	2,1879	1,5588
Araújo (2014)	7,16	2,87	30,19	21,47	2,25	1,59
Eberick	7,19	2,88	43,34	27,24	3,35	2,20

Fonte: Autor, 2024.

5.1.1 Análise dos valores obtidos na Tabela 5 para a validação do *software*

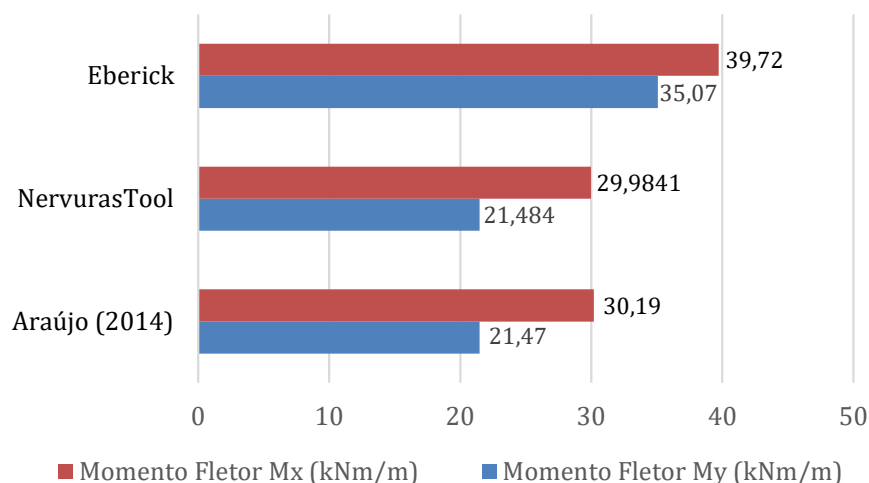
Ao comparar os resultados dos cálculos do peso total da laje obtidos pelos três métodos, observa-se que ambos seguem a mesma metodologia básica. As pequenas diferenças encontradas entre os resultados podem ser atribuídas a diferentes critérios de arredondamento. A metodologia de cálculo realizada pelo

Eberick traz uma flecha final diferente da que é calculada pelos dois processos de cálculo anteriores, assim, é necessário redimensionar a laje para a obtenção de uma flecha final menor que a flecha admissível, conforme apresentado no item 5.1.1.

Comparando os momentos fletores nas direções x e y, observou-se uma boa concordância entre os resultados obtidos pelo método de Araújo (2014) e pelo NervurasTool. As pequenas diferenças encontradas podem ser atribuídas a diferentes critérios de arredondamento. Por outro lado, os resultados obtidos pelo *software* Eberick apresentaram divergências significativas em relação aos demais métodos. Essa diferença pode ser explicada pela utilização de metodologias distintas cálculos: o método adotado por Araújo (2014) e pelo *software* desenvolvido empregam a teoria clássica de flexão de placas, enquanto o Eberick utiliza a analogia de grelha equivalente. Assim, devido à relação direta entre os momentos fletores solicitantes e as áreas de aço nas direções x e y, esperava-se que os resultados obtidos pelos dois primeiros fossem semelhantes, como de fato ocorreu. As áreas de aço calculadas por esses dois processos apresentaram valores próximos, com pequenas diferenças justificadas por diferentes critérios de arredondamento. Entretanto, ao comparar os resultados com o Eberick, observou-se uma diferença considerável nas áreas de aço, sendo os valores obtidos pelo Eberick maiores.

Uma comparação entre os processos de Araújo (2014) e o NervurasTool revela pequenas diferenças nos resultados. Essas diferenças são decorrentes da forma como os cálculos foram implementados no *software*. Para minimizar erros e aumentar a precisão, optou-se por utilizar funções matemáticas para modelar etapas que, nos métodos manuais, como o de Araújo (2014), demandavam a consulta de tabelas. Essa abordagem permite uma maior automatização dos cálculos e reduz a possibilidade de erros de interpolação ou leitura de tabelas.

O Gráfico 1 mostra a diferença entre os momentos fletores solicitantes nas direções de x e y, com os três processos de cálculo utilizados.

Gráfico 1 – Comparação dos momentos fletores solicitantes nas direções de x e y.

Fonte: Autor, 2024.

As diferenças nos valores dos momentos fletores calculados pelos diferentes processos têm implicações diretas no dimensionamento das armaduras, uma vez que as áreas de aço são diretamente proporcionais aos momentos fletores. Ao comparar os resultados, observa-se que o *software* Eberick apresenta momentos fletores consideravelmente maiores nas direções x e y, com diferenças de aproximadamente 10 e 14 kNm/m , respectivamente, quando comparado aos outros dois métodos. Essa diferença evidencia a influência do modelo de cálculo feito por analogia de grelha equivalente utilizado pelo Eberick.

5.1.2 Redimensionamento da laje no Eberick com flecha final menor que a flecha admissível

A Tabela 8 mostra os novos resultados após o redimensionamento da laje no Eberick.

Tabela 8 – Resultados do redimensionamento no Eberick.

Processo de cálculo	Peso Total (kN/m ²)	Flecha Final (cm)	Momento Fletor Mx (kNm/m)	Momento Fletor My (kNm/m)	Asx (cm ² /nervura)	Asy (cm ² /nervura)
Eberick	9,18	2,64	52,32	47,71	2,97	2,77

Fonte: Autor, 2024.

Com o objetivo de atender aos requisitos de flecha admissível, foi necessário enrijecer a laje, assim foi realizado o redimensionamento da laje nervurada. Após análise das diversas possibilidades, a configuração mais adequada foi obtida através

do aumento da espessura da mesa ($h_f = 9 \text{ cm}$) junto com o alargamento da nervura ($b = 13 \text{ cm}$). Essa modificação, embora tenha ocasionado um aumento no peso total da laje em virtude do maior volume de concreto utilizado, proporcionou o ganho de rigidez desejado, atendendo ao que é proposto em norma para a flecha admissível (*menor vão*/250, $820/250 = 3,28$). Em termos de esforços internos, os momentos fletores nas direções x e y apresentaram um aumento considerável, com um incremento de aproximadamente duas vezes em relação à configuração original para as duas direções. Os resultados demonstram claramente como a escolha da metodologia de cálculo impacta diretamente os valores finais.

5.2 COMPARATIVO ENTRE RESULTADOS DO NERVURASTOOL E O EBERICK

Neste item foram desenvolvidas análises comparativas de lajes nervuradas com o intuito de avaliar a influência das dimensões dos vãos e das distâncias entre eixo das nervuras (sendo $l_0 + b \leq 65 \text{ cm}$ e $l_0 + b \geq 65 \text{ cm}$), nelas foram adotadas as dimensões de viga com largura de 70 cm e altura de 80 cm, foram utilizados pilares quadrados de largura igual a 70 cm na sua seção transversal. Assim, através dos cálculos realizados pelo NervurasTool e Eberick, foi possível analisar como as combinações entre diferentes vãos e diferentes distâncias entre eixos podem eventualmente afetar o comportamento da estrutura.

A Tabela 9 mostra os resultados dos cálculos para laje nervurada com dimensões de 700 cm x 700 cm, nessa laje teve-se $l_0 + b \leq 65 \text{ cm}$, com $l_0 = 40 \text{ cm}$ e $b = 10 \text{ cm}$, além de ter utilizado um $h_f = 5 \text{ cm}$.

Tabela 9 – Resultados para laje nervurada de 700 cm x 700 cm com $l_0 + b \leq 65 \text{ cm}$.

Métodos calculados	Peso Total (kN/m ²)	Flecha Final (cm)	Momento Fletor Mx (kNm/m)	Momento Fletor My (kNm/m)	Asx (cm ² /nervura)	Asy (cm ² /nervura)
NervurasTool	6,23	1,1350	14,2749	14,2750	0,9688	0,9688
Eberick	6,71	0,89	24,37	24,43	1,41	1,46

Fonte: Autor, 2024.

A Tabela 10 mostra os resultados dos cálculos para laje nervurada com dimensões de 700 cm x 700 cm, $l_0 + b$ foi maior que 65 cm, com $l_0 = 60 \text{ cm}$ e $b = 10 \text{ cm}$, além de ter utilizado um $h_f = 5 \text{ cm}$.

Tabela 10 – Resultados para laje nervurada de 700 cm x 700 cm com $l_0 + b > 65$ cm.

Métodos calculados	Peso Total (kN/m ²)	Flecha Final (cm)	Momento Fletor Mx (kNm/m)	Momento Fletor My (kNm/m)	Asx (cm ² /nervura)	Asy (cm ² /nervura)
NervurasTool	5,7092	1,3721	13,0815	13,0817	1,2417	1,2417
Eberick	6,08	1,01	22,99	22,93	1,90	1,88

Fonte: Autor, 2024.

A Tabela 11 mostra os resultados dos cálculos para laje nervurada com dimensões de 800 cm x 800 cm, com $l_0 + b \leq 65$ cm, sendo $l_0 = 40$ cm e $b = 10$ cm, além de ter utilizado um $h_f = 5$ cm.

Tabela 11 – Resultados para laje nervurada de 800 cm x 800 cm com $l_0 + b \leq 65$ cm.

Métodos calculados	Peso Total (kN/m ²)	Flecha Final (cm)	Momento Fletor Mx (kNm/m)	Momento Fletor My (kNm/m)	Asx (cm ² /nervura)	Asy (cm ² /nervura)
NervurasTool	6,50	1,4712	19,3179	19,3181	1,1664	1,1664
Eberick	6,99	1,12	29,31	29,29	1,49	1,54

Fonte: Autor, 2024.

A Tabela 12 mostra os resultados dos cálculos para laje nervurada com dimensões de 800 cm x 800 cm, teve-se $l_0 + b > 65$ cm, com $l_0 = 60$ cm e $b = 10$ cm, além de ter utilizado um $h_f = 5$ cm.

Tabela 12 – Resultados para laje nervurada de 800 cm x 800 cm com $l_0 + b > 65$ cm.

Métodos calculados	Peso Total (kN/m ²)	Flecha Final (cm)	Momento Fletor Mx (kNm/m)	Momento Fletor My (kNm/m)	Asx (cm ² /nervura)	Asy (cm ² /nervura)
NervurasTool	5,9082	1,7653	17,5590	17,5592	1,4825	1,4825
Eberick	6,28	1,20	26,84	26,86	1,93	2,04

Fonte: Autor, 2024.

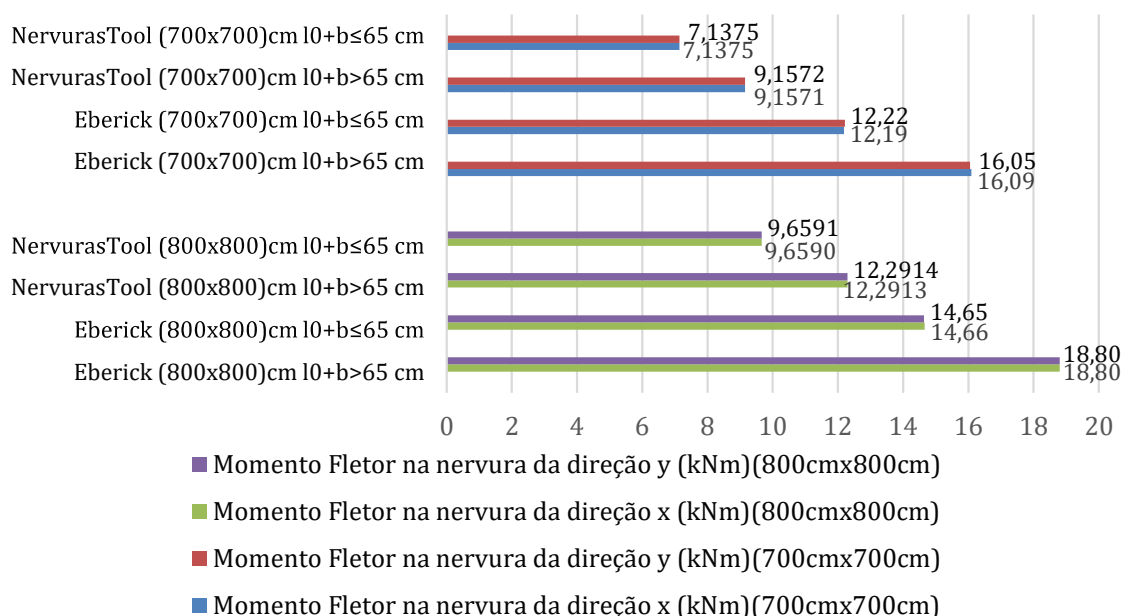
Os momentos fletores indicados nas tabelas 9 a 12 correspondem ao momento fletor por metro de largura da laje. Para determinar o momento fletor atuante nas nervuras nas direções x e y, é preciso multiplicar o valor do momento fletor por $l_0 + b$.

Os resultados apresentados nas tabelas 9 e 11, correspondem ao das lajes com menor espaçamento entre eixos de nervuras (inferior a 65 cm). Essas lajes

mostram-se mais rígidas e com menores flechas em comparação às lajes das tabelas 10 e 12. No entanto, essa maior rigidez implica em um maior consumo de concreto e, consequentemente, em um peso próprio maior. Por outro lado, as lajes com maior espaçamento entre eixos de nervuras (superior a 65 cm) apresentam maiores flechas e maiores momentos fletores nas nervuras de ambas as direções, demandando assim maiores áreas de aço.

O Gráfico 2 mostra o comparativo dos resultados de momentos fletores das nervuras, nas duas direções, para as lajes nervuradas de vãos livres entre vigas de 700 cm x 700 cm e de 800 cm x 800 cm.

Gráfico 2 – Comparativo da tabela 9 a tabela 12 dos resultados de momento fletor nas nervuras das direções de x e de y.



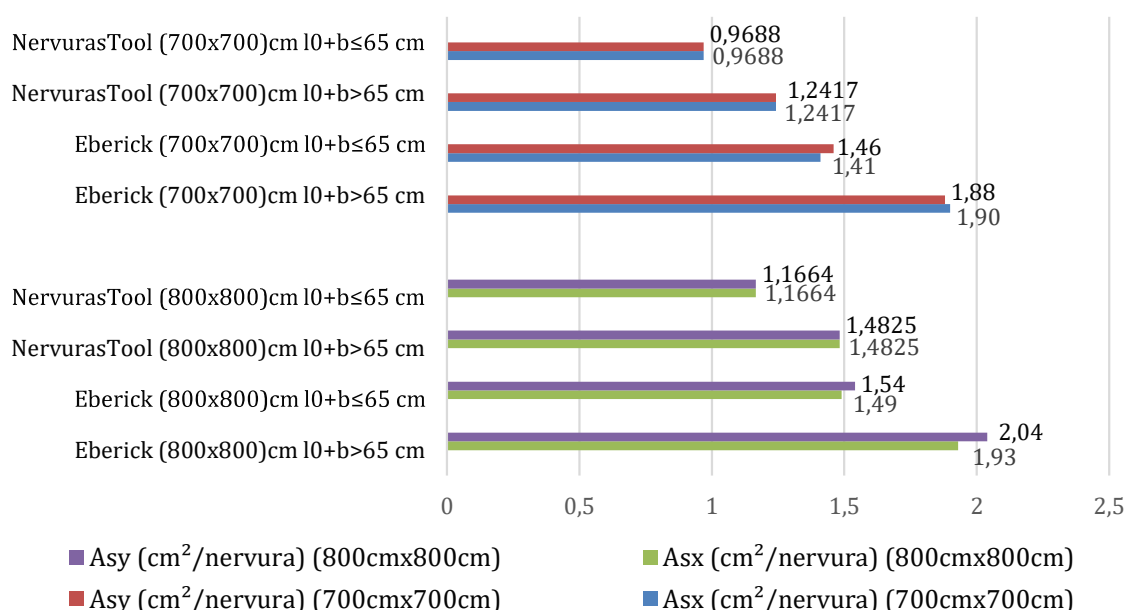
Fonte: Autor, 2024.

O gráfico mostra que para as duas situações de vãos entre vigas (700 cm x 700 cm e 800 cm x 800 cm) as nervuras com maior distância entre eixos tem maiores momentos fletores, tanto no cálculo realizado no NervurasTool quanto no feito pelo Eberick. É importante observar também que os esforços obtidos para as nervuras das lajes com vão entre apoios de 800 cm x 800 cm são maiores que os das lajes com vão de 700 cm x 700 cm. Vale salientar que para ambas as situações de vãos entre vigas de apoio, foram adotados os mesmos valores de distancias entre eixos de nervuras. Por fim, como já exposto anteriormente observa-se que os resultados de momentos fletores obtidos pelo Eberick são maiores que os fornecidos pelo

NervurasTool, o que acontece, conforme já discutido no item 5.1, pelo fato do Eberick ter como modelo de cálculo à analogia de grelha equivalente.

O Gráfico 3 apresenta uma comparação entre os resultados obtidos pelos *softwares* NervurasTool e Eberick para as áreas de aço nas nervuras das direções de x e de y, das lajes dimensionadas nas tabelas 9 a 12.

Gráfico 3 – Comparativo da tabela 9 a tabela 12 dos resultados das áreas de aços nas nervuras nas direções de x e de y.



Fonte: Autor, 2024.

O gráfico apresenta para as duas situações de vãos entre vigas (700 cm x 700 cm e 800 cm x 800 cm) as nervuras com a distância entre eixos superior a 65 cm as maiores áreas de aço, no cálculo realizado no NervurasTool e no feito pelo Eberick. Conforme esperado, as lajes com vão de 800 cm x 800 cm apresentaram áreas de aço maiores em comparação às lajes com vão de 700 cm x 700 cm. Importante ressaltar que para ambas as situações de vãos entre vigas de apoio, foram adotados os mesmos valores de distâncias entre eixos de nervuras. Enfim, como já discutido no item 5.1, os resultados de áreas de aço necessária obtidos pelo Eberick apresentam valores superiores ao calculados pelo NervurasTool. Essa diferença se deve ao modelo de cálculo por analogia de grelha equivalente utilizado pelo Eberick.

Dando continuidade às análises, foi avaliada uma laje com vão de 900 cm x 900 cm. Para garantir a consistência dos resultados, foram mantidas as mesmas

dimensões para a distância entre eixos das nervuras e a espessura da mesa, utilizadas nas análises anteriores das lajes de 700 cm x 700 cm e 800 cm x 800 cm.

A Tabela 13 mostra os resultados dos cálculos para laje nervurada com dimensões de 900 cm x 900 cm, nessa laje teve-se $l_0 + b \leq 65$ cm, com $l_0 = 40$ cm e $b = 10$ cm, além de ter utilizado um $h_f = 5$ cm.

Tabela 13 – Resultados para laje nervurada de 900 cm x 900 cm com $l_0 + b \leq 65$ cm.

Métodos calculados	Peso Total (kN/m ²)	Flecha Final (cm)	Momento Fletor Mx (kNm/m)	Momento Fletor My (kNm/m)	Asx (cm ² /nervura)	Asy (cm ² /nervura)
NervurasTool	8,2144	1,6495	30,7306	30,7309	1,6203	1,6203
Eberick	8,35	1,69	43,30	43,29	1,98	2,08

Fonte: Autor, 2024.

A Tabela 14 mostra os resultados dos cálculos para laje nervurada com dimensões de 900 cm x 900 cm, nessa laje teve-se $l_0 + b$ superior a 65 cm, com $l_0 = 60$ cm e $b = 10$ cm, além de ter utilizado um $h_f = 5$ cm.

Tabela 14 – Resultados para laje nervurada de 900 cm x 900 cm com $l_0 + b > 65$ cm.

Métodos calculados	Peso Total (kN/m ²)	Flecha Final (cm)	Momento Fletor Mx (kNm/m)	Momento Fletor My (kNm/m)	Asx (cm ² /nervura)	Asy (cm ² /nervura)
NervurasTool	7,5216	1,9594	28,1389	28,1392	2,0744	2,0744
Eberick	7,56	1,95	42,81	42,79	2,92	2,92

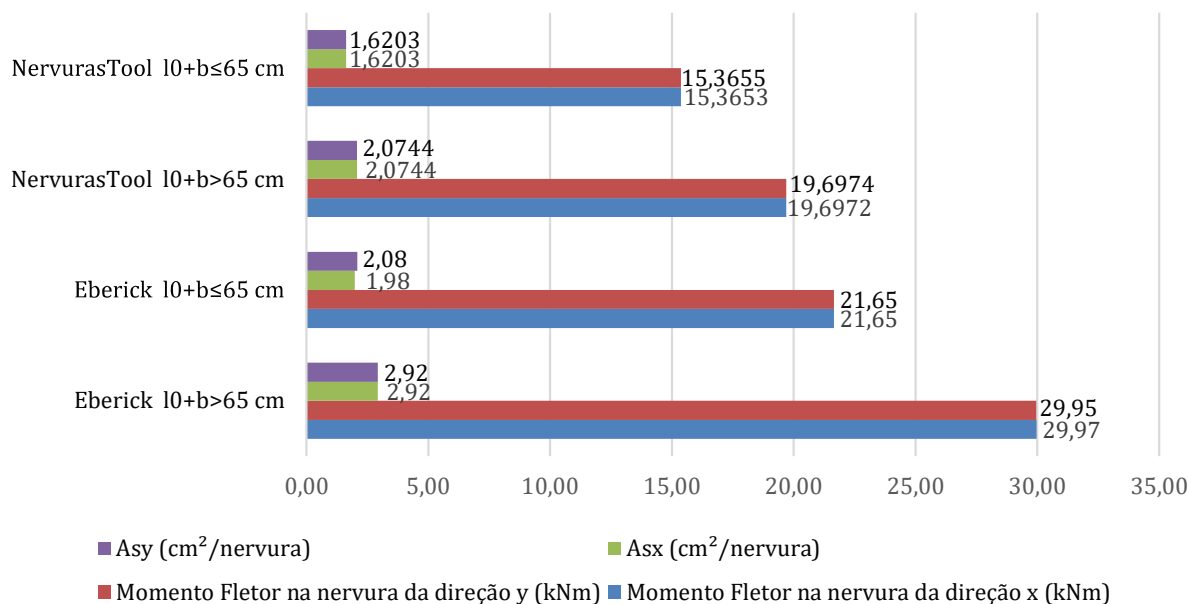
Fonte: Autor, 2024.

Observa-se que as lajes com espaçamento entre nervuras inferior a 65 cm (Tabela 13) apresentam maior rigidez e menores deformações, tanto no NervurasTool quanto no Eberick, porém com um maior consumo de concreto, elevando assim o peso próprio da laje. Por outro lado, as lajes com espaçamento superior a 65 cm (Tabela 14) são menos rígidas, possuem maiores deformações e maiores áreas de aço.

A análise do Gráfico 4, considerando os dados das tabelas 13 e 14, mostra que o aumento dos momentos fletores nas nervuras implica em aumento das áreas de aço correspondentes, tanto na direção x quanto na direção y. Essa relação indica

que, à medida que os momentos nas nervuras aumentam, a área de aço de cálculo também aumenta.

Gráfico 4 – Comparativo da tabela 13 e a tabela 14 da relação entre o momento fletor nas nervuras e as áreas de aço nas nervuras, na direção x e na direção y.



Fonte: Autor, 2024.

O gráfico mostra que as nervuras com maior distância entre eixos têm maiores momentos fletores e maiores áreas de aço, tanto no cálculo realizado no NervurasTool quanto no feito pelo Eberick. Por fim, como esperado, é notável que os resultados de momentos fletores e áreas de aço obtidos pelo Eberick são maiores do que os resultados encontrados pelo NervurasTool. Essa diferença é atribuída ao que já foi exposto anteriormente, devido aos diferentes modelos de cálculo empregados por cada *software*: o NervurasTool utiliza a teoria da flexão de placas, em que considera a laje como uma placa contínua, enquanto o Eberick emprega o método de grelha equivalente, em que as vigas deformam junto a laje, resultando em maiores deformações.

6 CONCLUSÃO

Este trabalho apresenta a comunidade acadêmica um *software* com a capacidade de dimensionar lajes nervuradas isotrópicas em concreto armado, com uma interface intuitiva, visando facilitar o aprendizado e a utilização da ferramenta por estudantes de engenharia civil, e ainda aplicações práticas eventualmente necessárias para projetistas estruturais. O NervurasTool foi programado em *Python*, uma linguagem de programação conhecida por sua versatilidade e facilidade de uso. Esse *software* desenvolvido tem o propósito de contribuir para o desenvolvimento de novas ferramentas e pesquisas na área de estruturas de concreto armado.

Conforme os procedimentos descritos no item 4.3, realizou-se inicialmente a validação do NervurasTool utilizando o exemplo 6.4 disponibilizado no livro “Curso de concreto armado, volume 4” de Araújo (2014). Os resultados obtidos foram satisfatórios, apresentando pequenas diferenças, sendo associadas a diferença de arredondamento. Sequencialmente foi realizado um estudo comparativo com o Eberick utilizando o mesmo exemplo. Os resultados obtidos pelos dois *softwares* apresentaram diferenças significativas, sendo necessário redimensionar a laje nervurada, no Eberick, do exemplo sugerido por Araújo (2014) para atender aos requisitos de flecha admissível estabelecido por norma. Assim, ficou evidente que o método de cálculo utilizado nas ferramentas influenciou diretamente nos resultados.

Embora os resultados apresentados pelos dois *softwares*, NervurasTool e Eberick, tenham sido diferentes, observou-se valores coesos em que: o aumento das dimensões da laje e do espaçamento entre eixo de nervuras resultou em um aumento proporcional nos momentos fletores e nas áreas de aço das nervuras, indicando que ambos os *softwares* capturam corretamente a relação entre as variáveis dimensões geométricas e os esforços solicitantes.

Em suma, os resultados obtidos neste trabalho demonstram que o objetivo de validar o NervurasTool para fins acadêmicos foi plenamente alcançado. A comparação com os resultados de Araújo (2014), bem como os dimensionamentos de laje nervuradas com variação de vãos de vigas (7m, 8m e 9m) e de espaçamentos entre eixos de nervuras (acima e abaixo de 65 cm), indicaram a eficiência do *software* para dimensionar lajes nervuradas.

Mediante o exposto, o NervurasTool apresenta-se como uma ferramenta útil para o ensino e a aprendizagem de dimensionamento de lajes nervuradas isotrópicas de concreto armado.

Como sugestões para trabalhos futuros, tem-se:

Analisar lajes nervuradas considerando outras condições de apoio, sendo necessário adicionar essa funcionalidade no NervurasTool;

Avaliar e validar a eficiência do NervurasTool considerando outras variações de vãos de vigas e de espaçamentos entre eixos de nervuras.

REFERÊNCIAS

ALTOQI. A AltoQi está sempre perto de você. **AltoQi: Tecnologia aplicada à engenharia.** Rosário do Catete. Disponível em: <<https://www.altoqi.com.br/institucional>>. Acesso em: set, 2023.

ANTUNES, K. O. **Estudo comparativo entre lajes maciças e nervuradas unidirecionais e bidirecionais de concreto armado.** 2017. 92f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2019.

ARAÚJO, J. M. **Curso de concreto armado.** v. 1, 4ª ed. Rio Grande: Editora Dunas, 2014.

ARAÚJO, J. M. **Curso de concreto armado.** v. 2, 4ª ed. Rio Grande: Editora Dunas, 2014.

ARAÚJO, J. M. **Curso de concreto armado.** v. 3, 4ª ed. Rio Grande: Editora Dunas, 2014.

ARAÚJO, J. M. **Curso de concreto armado.** v. 4, 4ª ed. Rio Grande: Editora Dunas, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Projeto de estruturas de concreto: procedimento.** ABNT NBR 6118, Rio de Janeiro, 2023.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Aço destinado às armaduras para estruturas de concreto armado – Requisitos.** ABNT NBR 7480, Rio de Janeiro, 2022.

BASTOS, P. S. S. Notas de aula: Histórico e principais elementos estruturais de concreto armado. **Universidade Estadual Paulista: Faculdade de Engenharia de Bauru – Departamento de Engenharia Civil.** Bauru, 2006.

BURIOL, Tiago; ARGENTA, Marco. **Acelerando o Desenvolvimento e o Processamento de Análises Numéricas Computacionais Utilizando Python e Cuba.** <https://www.researchgate.net/publication/228683446>. Universidade Federal do Paraná, Centro Politécnico Jd Américas, Curitiba, janeiro, 2009.

DINIZ, C. W. S; LAGES, E. N; BARBOZA, A. S. R. **Estabilidade global de sistemas estruturais de edifícios considerando a ligação viga-pilar parede.** Revista IBRACON de Estruturas e Materiais, volume 12, nº 4. São Paulo: 2019.

CARVALHO, Mailson Castelão de. **Análise Comparativa estrutural e econômica entre as lajes maciça, nervurada treliçada e nervurada com cuba plástica em 77 em edifício de 10 pavimentos.** 2012. Pág 79. Dissertação – Departamento de Tecnologia da Universidade Estadual de Feira de Santana. Feira de Santana.

CARVALHO, R. C.; PINHEIRO, L. M. **Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado.** São Carlos: PINI Ltda, 2009.

CARVALHO, Roberto Chust; FIGUEIREDO FILHO, Jasson Rodrigues de. **Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado Segundo a NBR 6118:2003**, 3ª. ed. São Carlos: Ed. Edufscar, 2013.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **CEB-FIP Model Code 1990**. Published by Thomas Telford, London, 1993.

CHUST, R. C. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado**. São Carlos. V.3, Pag. 64-65. 2013.

FERRAZ, Henrique. O aço na construção civil. **CDCC USP**, núm. 22, out./nov./ dez./ 2003.

FREITAS, M. L. M. X. **História e Historiografia da Arquitetura e do Urbanismo Modernos no Brasil – Concreto Armado no Brasil: Invenção, História, Revisões**. In: 13º SEMINÁRIO DOCOMOMO, Salvador, 10-17 de outubro, 2019. Anais [...]. Salvador, outubro de 2019.

HENNRICHS, C. **Estudos sobre a Modelagem de Lajes Planas de Concreto Armado**. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Departamento de Engenharia Civil, Florianópolis, 2003.

KIMURA, A. **Informática Aplicada a Estruturas de Concreto Armado**. 2. ed. São Paulo SP: Oficina de Textos, 2018.

LIBÂNIO, M. Pinheiro; MUZARDO, Cassiane D.; SANTOS, Sandro P.; CATOIA, Thiago; CATOIA, Bruna. **Estruturas de Concreto – Capítulo 1**, USP – FESC. Departamento de Engenharia de Estruturas, março de 2010.

LOPES, André F. O. **Estudo técnico comparativo entre lajes maciças e nervuradas com diferentes tipos de materiais de enchimento**. 2012. Trabalho de conclusão de curso. Universidade Federal de Pernambuco. Caruaru/PE.

LOPES, H. M. T.; CHAVES, W. K. C.; BEZERRA, E. M. F. **Aplicativo para dispositivos móveis para o dimensionamento de peças de madeira sujeitas à tração e compressão**. In: Encontro Brasileiro em Madeiras e Congresso LatinoAmericano de Estruturas de Madeira, 16, 3. São Carlos, EBRAMEM e CLEM, 2018.

MARTHA, L. F. **Análise de Estruturas**. 2. ed. Rio de Janeiro: Campus, 2017.

MENEZES, L. et al. **Efeito da Flexibilidade das Vigas Na Análise Estrutural de Lajes em Concreto Armado**. In: IBRACON, 2018. Foz do Iguaçu. Anais do 60º Congresso Brasileiro de Concreto.

OLIVEIRA, Camilla Araújo Coelho; DE GOIS SANTOS, Débora. Análise das interferências da coordenação de projetos durante a execução de obras. **Scientia Plena**, v. 11, n. 11, 2015.

PINHEIRO, L.M. **Fundamentos do concreto e projeto de edifícios** – Escola de Engenharia da Universidade de São Paulo, São Carlos, 2007.

SANTOS, Euler W. F., et al. **Desenvolvimento de uma Ferramenta Computacional Acadêmica para uso no desenvolvimento de Lajes Nervuradas em Concreto Armado**. Relatório Parcial de Avaliação de Projeto – PIBIC (Edital 01/2023/DPP/PROPEX/IFS). Aracaju, 01, março, 2024.

SEBESTA, Robert. **Conceitos de Linguagens de Programação**, 11ª edição. Universidade do Colorado: Pearson Education. Colorado Springs, 2016.

SILVA, Igor; SILVA, Rogério. **Liguagem de Programação Python**. Revista Tecnologias em Projeção, v. 10, n. 1, p. 57, ano 2019.

SILVA, Rodrigo Mero Sarmiento. **Notas de Aula de Estabilidade das Construções**. Centro Federal Tecnológico de Alagoas (CEFET-AL/UNED-PI), 2011.

SOUZA, P. H. E. et al. **Mit App Inventor: Uma Aplicação no Desenvolvimento de um Aplicativo para Cálculo da Armadura de Vigas de Concreto**. In: Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia e Simpósio Internacional de Educação em Engenharia Abenge, 47, 2019, Fortaleza CE.

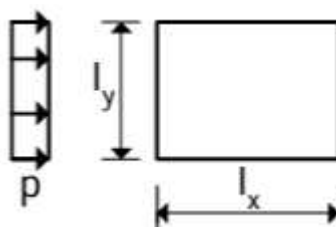
SPOHR, V. **Análise Comparativa: Sistemas Estruturais Convencionais e Estruturas de Lajes Nervuradas**. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Santa Maria, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Santa Maria, 2008.

STRAMANDINOLI, J. **Contribuições à Análise de Lajes nervuradas por Analogia de Grelha**. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Departamento de Engenharia Civil, Florianópolis, 2003.

TORRES, A. **Contribuição ao Dimensionamento de lajes Treliçadas em Concreto Pré-Fabricado**. Dissertação de Mestrado – Universidade Estadual de Campina, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Capinas, 2018.

TRAUTWEIN, Leandro Mouta. **Punção em Lajes Cogumelo de Concreto Armado: Análise experimental e Numérica**. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, São Paulo, 2006.

Anexo 1 – Tabela A2.1 – Laje retangular simplesmente apoiada no contorno com cargas uniformemente distribuída



l_x/l_y	w_c	m_x	m_y	m_{xy}	r_x	r_y
0,50	10,13	100,0	36,7	52,8	269	366
0,55	9,38	93,4	38,8	51,8	268	353
0,60	8,65	86,9	40,7	50,6	267	340
0,65	7,94	80,5	42,3	49,4	266	326
0,70	7,26	74,3	43,5	47,9	265	315
0,75	6,62	68,3	44,2	46,3	263	303
0,80	6,03	62,7	44,6	44,6	261	291
0,85	5,48	57,6	44,9	42,8	259	281
0,90	4,98	52,8	45,0	41,0	256	270
0,95	4,51	48,3	44,7	39,1	253	260
1,00	4,06	44,2	44,2	37,1	250	250

l_y/l_x	w_c	m_x	m_y	m_{xy}	r_x	r_y
1,00	4,06	44,2	44,2	37,1	250	250
0,95	4,51	44,7	48,3	39,1	260	253
0,90	4,98	45,0	52,8	41,0	270	256
0,85	5,48	44,9	57,6	42,8	281	259
0,80	6,03	44,6	62,7	44,6	291	261
0,75	6,62	44,2	68,3	46,3	303	263
0,70	7,26	43,5	74,3	47,9	315	265
0,65	7,94	42,3	80,5	49,4	326	266
0,60	8,65	40,7	86,9	50,6	340	267
0,55	9,38	38,8	93,4	51,8	353	268
0,50	10,13	36,7	100,0	52,8	366	269

Fonte: ARAÚJO, 2014.

Anexo 2 – Tabela A3.2 – Área da seção de armadura, A_s (cm²)

ϕ	1	2	3	4
3,4	0,09	0,18	0,27	0,36
4,2	0,14	0,28	0,42	0,55
5	0,20	0,39	0,59	0,79
6,3	0,31	0,62	0,94	1,25
8	0,50	1,01	1,51	2,01
10	0,79	1,57	2,36	3,14
12,5	1,23	2,45	3,68	4,91
16	2,01	4,02	6,03	8,04
20	3,14	6,28	9,42	12,57

Fonte: ARAÚJO, 2014.

Anexo 3 – Área da seção de armadura A_{sw} (cm²/m) para estribos de dois ramos

S (cm)	5	6,3
7,0	5,61	8,91
7,5	5,24	8,31
8,0	4,91	7,79
8,5	4,62	7,33
9,0	4,36	6,93
9,5	4,13	6,56
10	3,93	6,23
11	3,57	5,67
12	3,27	5,20
13	3,02	4,80
14	2,80	4,45
15	2,62	4,16
16	2,45	3,90
17	2,31	3,67
18	2,18	3,46
19	2,07	3,28
20	1,96	3,12
21	1,87	2,97
22	1,78	2,83
23	1,71	2,71
24	1,64	2,60
25	1,57	2,49
26	1,51	2,40
27	1,45	2,31
28	1,40	2,23
29	1,35	2,15
30	1,31	2,08

Fonte: ARAÚJO, 2014.

Apêndice A – Imagens das análises realizadas no Eberick para vigas com largura de 20 cm e altura de 50 cm.

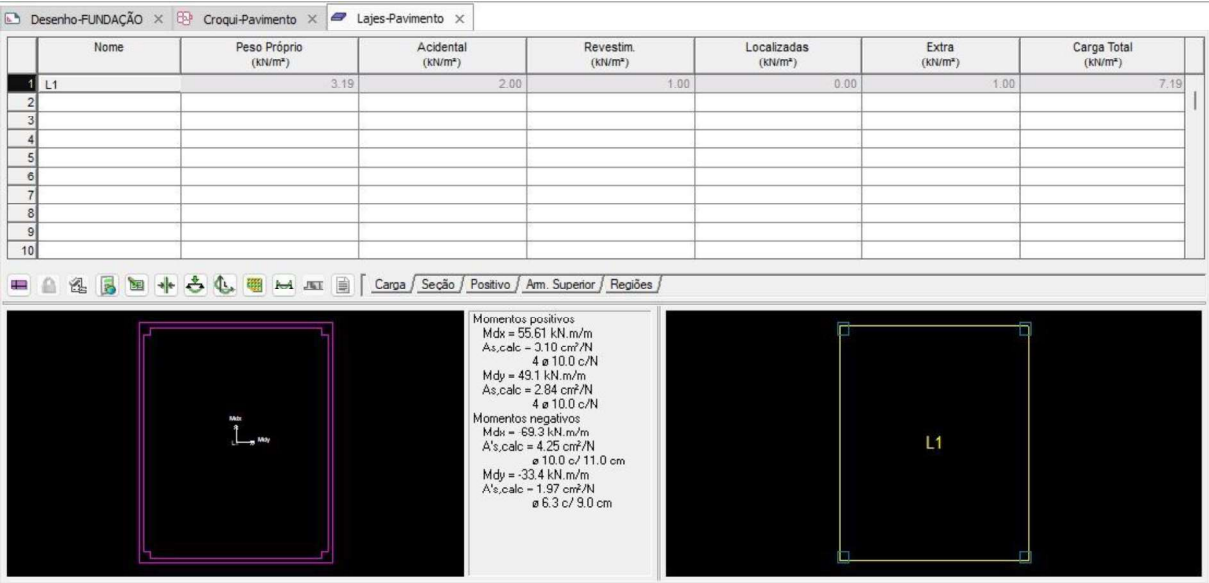
Figura 33 – Dimensões da viga (20 cm x 50 cm).

Fonte: EBERICK, 2024.

Figura 34 – Dimensões do pilar (50 cm x 50 cm).

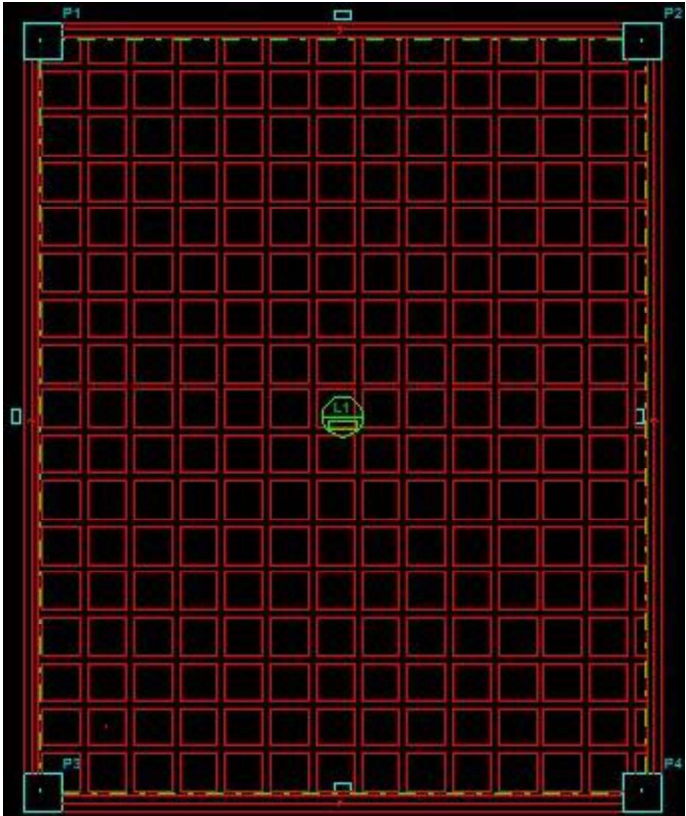
Fonte: EBERICK, 2024.

Figura 35 – Resultados obtidos: Momentos fletores e áreas de aço.



Fonte: EBERICK, 2024.

Figura 36 – Modelo da laje nervurada com as dimensões das vigas de 20 cm x 50 cm.



Fonte: EBERICK, 2024.

Figura 37 – Processo de análise para cálculo da estrutura no Eberick (modelo utilizado em todas as análises).

Análise da estrutura

Estado-limite último (ELU)

☒ Análise estática linear

☐ Verificação das etapas construtivas

☒ Dimensionamento dos elementos

☒ Dimensionar todos os elementos

☐ Dimensionar elementos selecionados ...

☒ Verificar limites de redistribuição em nós semirrígidos

Estado-limite de deformações excessivas (ELS-DEF)

☒ Determinação dos deslocamentos do pórtico

☒ Adotar rigidez configurada

☐ Calcular rigidez fissurada

☒ Determinação dos deslocamentos das lajes

☒ Adotar rigidez configurada

☐ Calcular rigidez fissurada

Estado-limite de vibrações excessivas (ELS-VE)

☒ Análise dinâmica do pórtico

☐ Análise dinâmica das lajes

☒ Verificar todos os pavimentos

☐ Verificar pavimentos selecionados ...

OK Cancelar Configurar... Ajuda

Fonte: EBERICK, 2024.

Figura 38 – Espaçamento de grelha utilizada para o cálculo de dimensionamento das lajes nervuradas no Eberick.

Grelha

Discretização da laje

☒ Adotar espaçamento configurado

Espaçamento X 70 cm

Espaçamento Y 70 cm

Ângulo 0 °

Pré-fabricadas 1D

☐ Adotar configuração

Vão inicial mínimo cm

Vão entre nervuras cm

Grelha não linear

☐ Utilizar análise com plastificação dos apoios

☒ Adotar limites configurados

Redistribuição máxima 15 %

Aplicar para taxas de armadura maiores que 0.5 %

Armadura equivalente em X 0.00 cm²/m

Armadura equivalente em Y 0.00 cm²/m

Momento de plastificação em X 0.00 kN.m

Momento de plastificação em Y 0.00 kN.m

OK Cancelar Ajuda

Fonte: EBERICK, 2024.

Apêndice B – Imagens das análises realizadas no Eberick para vigas com largura de 50 cm e altura de 50 cm.

Figura 39 – Dimensões da viga (50 cm x 50 cm).

Viga

Dados da viga

Nome Ambiente Modelo...

Seção do trecho

Tipo

bw cm h cm

b1 cm h1 cm

☐ Obter elevação para viga invertida

Elevação cm

☒ Manter seção constante na viga

Cargas no trecho

Carga de parede kN/m Lançar... Remover

Carga extra kN/m Editar... Remover

Temperatura e retração °C Editar... Remover

OK Cancelar Desenho... Ajuda

Fonte: EBERICK, 2024.

Figura 40 – Dimensões do pilar (50 cm x 50 cm).

Pilar

Dados do pilar

Nome Ambiente

☐ Detalhamento contínuo no lance

Modelo

Vínculo Verticalidade

Seção

Tipo

b cm h cm

b1 cm h1 cm

Ângulo de abertura °

Ângulo de rotação °

Elevação cm

☒ Manter seção constante na prumada

Capitel

☐ Usar capitel

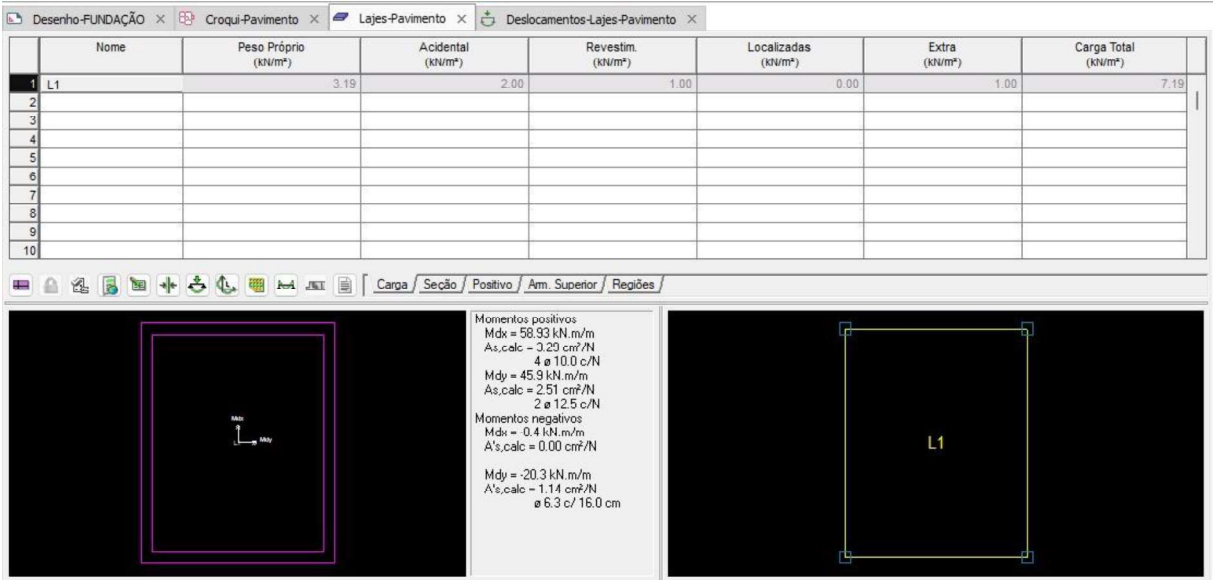
Ângulo de rotação ° b cm

Espessura cm h cm

OK Cancelar Desenho... Cargas... Ajuda

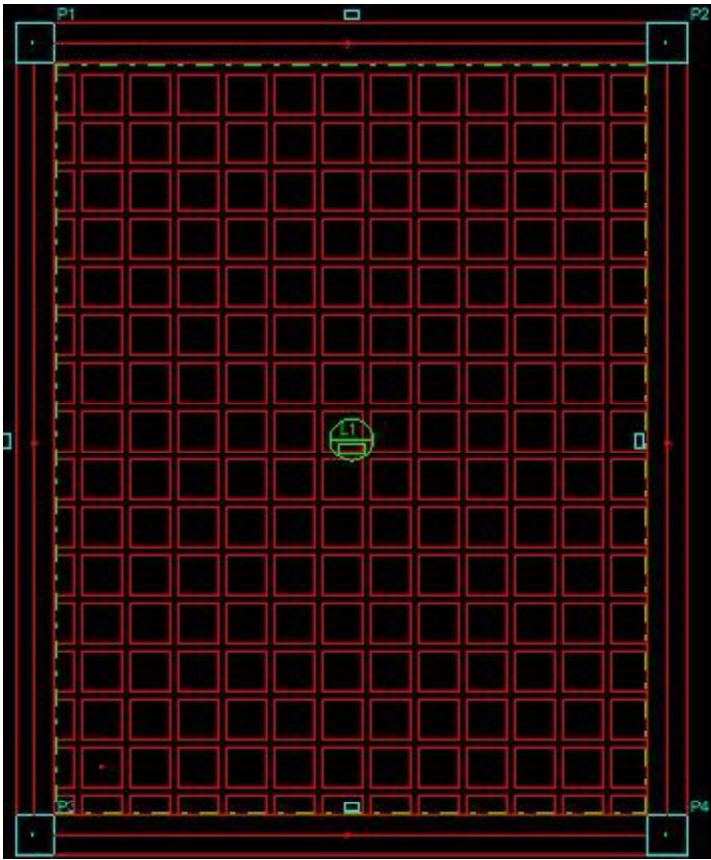
Fonte: EBERICK, 2024.

Figura 41 – Resultados obtidos: Momentos fletores e áreas de aço.



Fonte: EBERICK, 2024.

Figura 42 – Modelo da laje nervurada com as dimensões das vigas de 50 cm x 50 cm.



Fonte: EBERICK, 2024.

Apêndice C – Imagens das análises realizadas no Eberick para vigas com largura de 70 cm e altura de 80 cm.

Figura 43 – Dimensões da viga (70 cm x 80 cm).

Viga

Dados da viga
Nome: V1
Ambiente: Externo
Modelo...

Seção do trecho
Tipo: retangular
bw: 70 cm h: 80 cm
bf: 0 cm hf: 0 cm
☐ Obter elevação para viga invertida
Elevação: 0 cm
☒ Manter seção constante na viga

Cargas no trecho
Carga de parede: 0.00 kN/m Lançar... Remover
Carga extra: 0 kN/m Editar... Remover
Temperatura e retração: 0 °C Editar... Remover

OK Cancelar Desenho... Ajuda

Fonte: EBERICK, 2024.

Figura 44 – Dimensões do pilar (70 cm x 70 cm).

Pilar

Dados do pilar
Nome: P1
Ambiente: Externo
☐ Detalhamento contínuo no lance

Modelo
Vínculo: Engastado
Verticalidade: Vertical

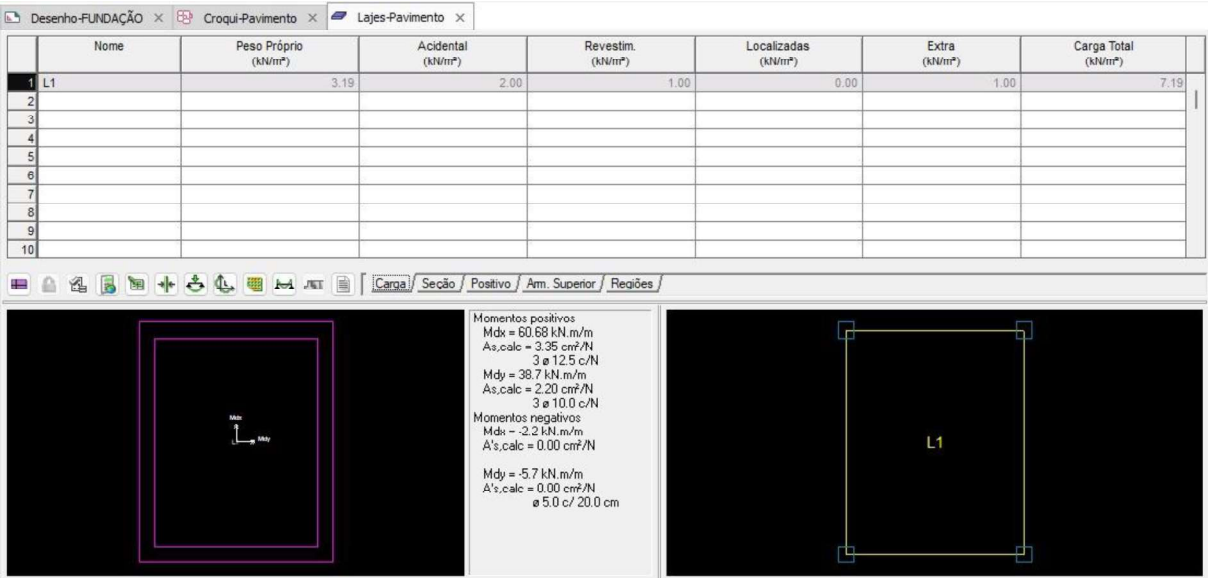
Seção
Tipo: retangular
b: 70 cm h: 70 cm
b1: 0 cm h1: 0 cm
Ângulo de abertura: 90 °
Ângulo de rotação: 0 °
Elevação: 0 cm
☒ Manter seção constante na prumada

Capitel
☐ Usar capitel
Ângulo de rotação: 0 ° b: 150 cm
Espessura: 80 cm h: 150 cm

OK Cancelar Desenho... Cargas... Ajuda

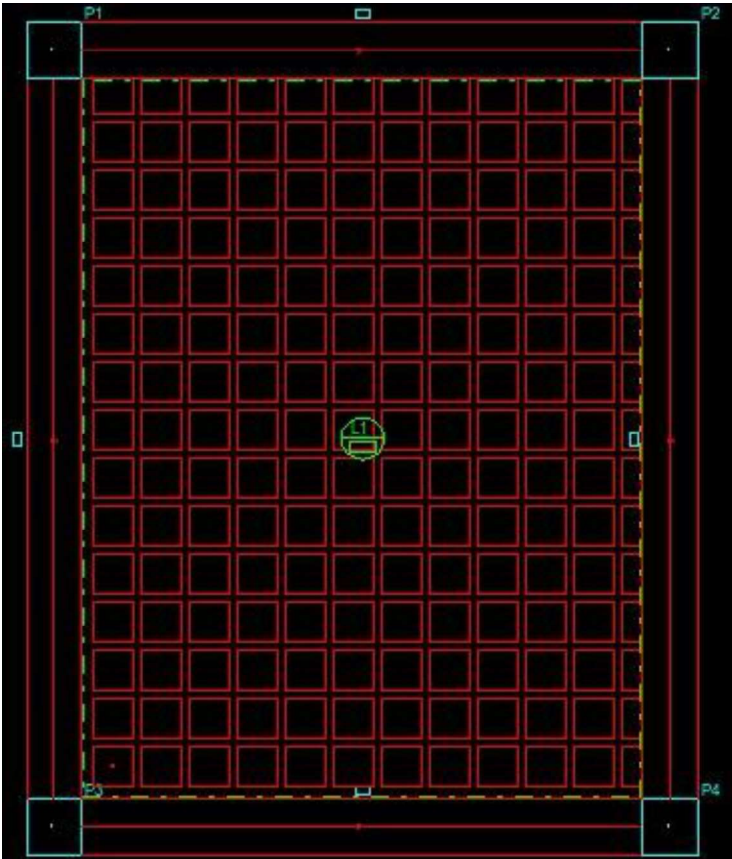
Fonte: EBERICK, 2024.

Figura 45 – Resultados obtidos: Momentos fletores e áreas de aço.



Fonte: EBERICK, 2024.

Figura 46 – Modelo da laje nervurada com as dimensões das vigas de 70 cm x 80 cm.



Fonte: EBERICK, 2024.